Théorème de Kennely.

Quand on fait l'étude des réseaux *passifs*, il est souvent intéressant soit de remplacer trois branches en triangle par trois branches en étoile, soit d'effectuer la transformation inverse.

II.5.1. Passage du triangle à l'étoile.

Désignons par $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ les impédances des trois branches du triangle et par $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ les impédances des trois branches de l'étoile équivalente (fig. II-5). Enfin appelons $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$, et $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ les admittances qui correspondent à ces impédances ($\mathbf{y}_1 = 1/\mathbf{z}_1$, $\mathbf{y}_2 = 1/\mathbf{z}_2$...).

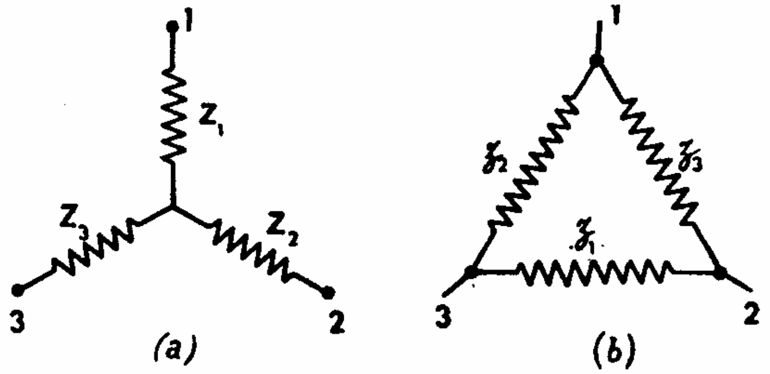

FIG. II-5.

Ecrivons que, dans les deux cas, on a la même impédance $\mathbf{Z}_{12}$ entre les bornes 1 et 2. On a :

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{12}} = \mathbf{y}_3 + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathbf{y}_1} + \dfrac{1}{\mathbf{y}_2}} = \frac{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}$$

si l'on pose :

$$\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_2\mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_3\mathbf{y}_1$$

d'où :

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} \qquad (1)$$

et, par permutation circulaire, on a :

$$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} \qquad (2)$$

$$\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_1}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} \qquad (3)$$

Ajoutons ces trois relations et divisons par 2 les deux membres, il vient :

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} \qquad (4)$$

Retranchons la relation (3) de la relation (4), on a :

$$\boxed{\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} = \frac{\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3}{\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3}}$$

Il est intéressant de noter que $\mathbf{Z}_1$ est la branche de l'étoile reliée à la borne 1 alors que $\mathbf{z}_2$ et $\mathbf{z}_3$ sont les deux branches du triangle qui aboutissent à cette même borne. On obtient facilement $\mathbf{Z}_2$ et $\mathbf{Z}_3$ par permutation circulaire.

II.5.2. Passage de l'étoile au triangle.

Utilisons le premier groupe des formules précédentes pour calculer l'expression suivante :

$$\Sigma\, \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1$$

Comme on a :

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2}, \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{y}_2}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2}, \quad \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{y}_3}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2}$$

il vient :

$$\Sigma\, \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{\Sigma\, \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2}$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_{23} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\Sigma\, \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}}$$

Remarquons que la formule est identique à celle du passage triangle-étoile, à condition de remplacer les impédances par les admittances.