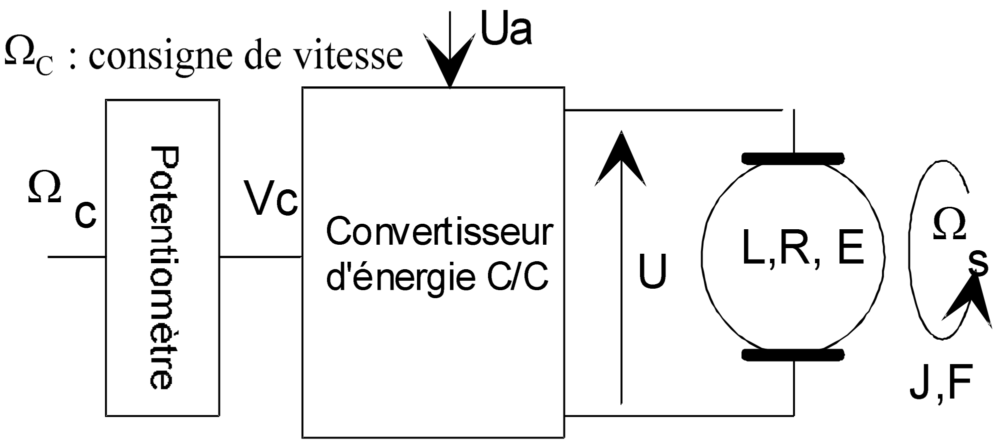
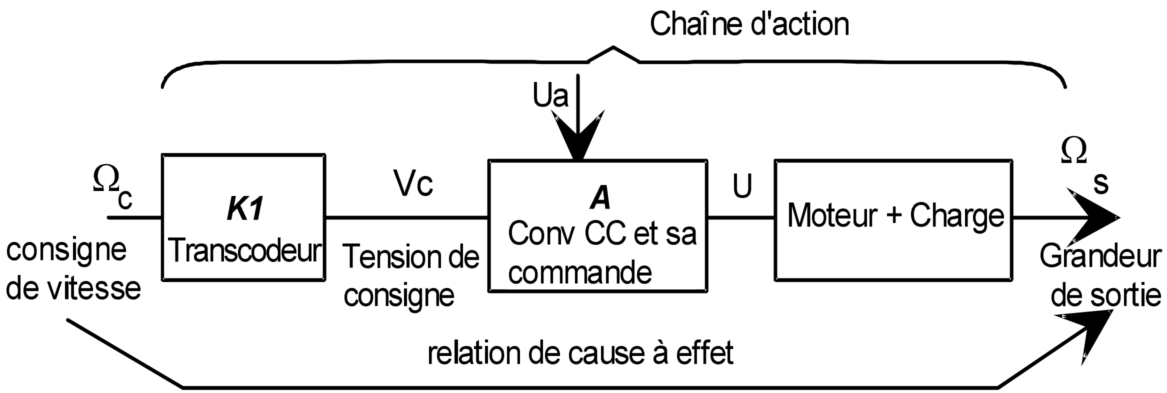
Les asservissements

Mathématiques Spéciale TSI La Rochelle : les asservissements (v1.3)

Systèmes en chaîne ouverte

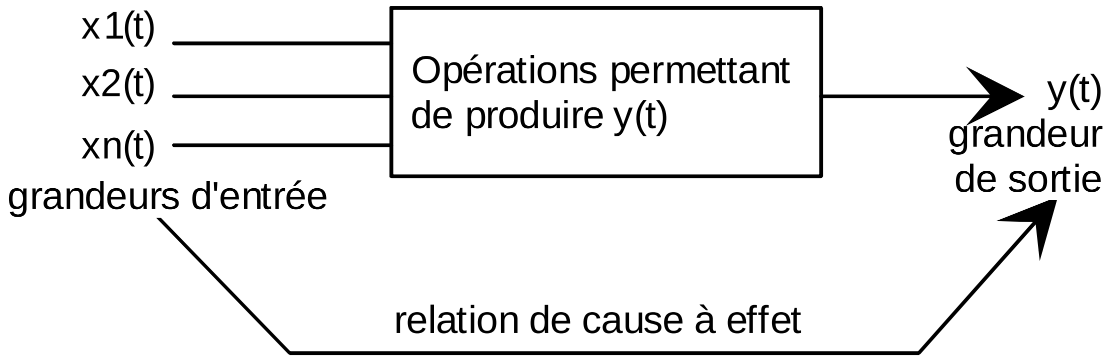
- **Exemple de système en chaîne ouverte**





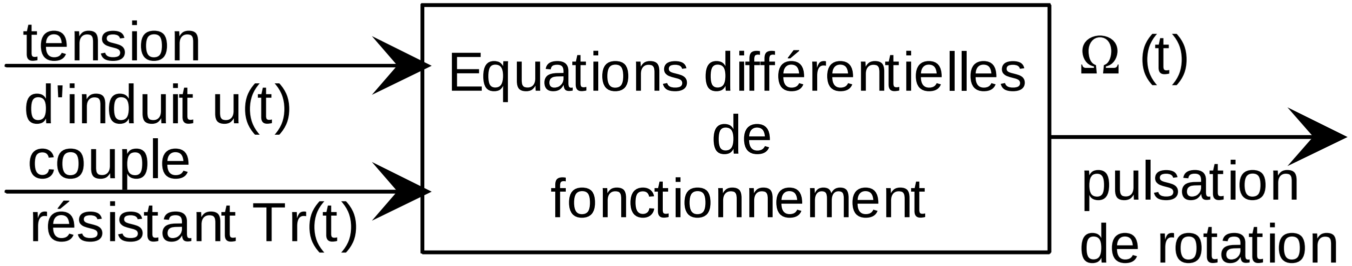
Définition d'un système en chaîne ouverte

- Système qui produit une grandeur de sortie y(t) fonction d'une (ou plusieurs) grandeur d'entrée x(t).
- Les entrées d'un système sont les grandeurs qui agissent sur la sortie :
  - Les **entrées de commande**
  - Les **perturbations**



Les opérations à effectuer pour produire y(t) à partir de x(t) consistent en une équation différentielle.
Si l'équation est d'ordre=0, l'opération est une proportionnalité.

Fonctionnement d'un système en chaîne ouverte (par exemple : MCC)

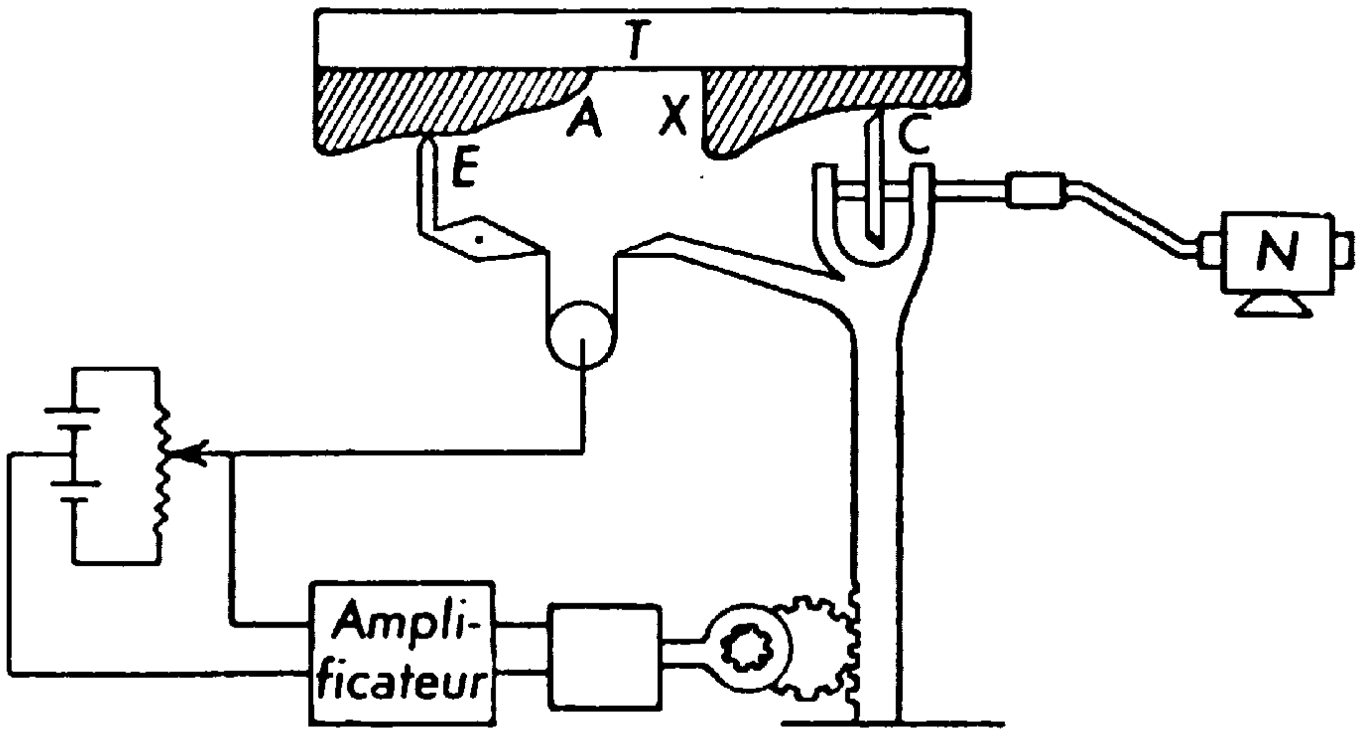


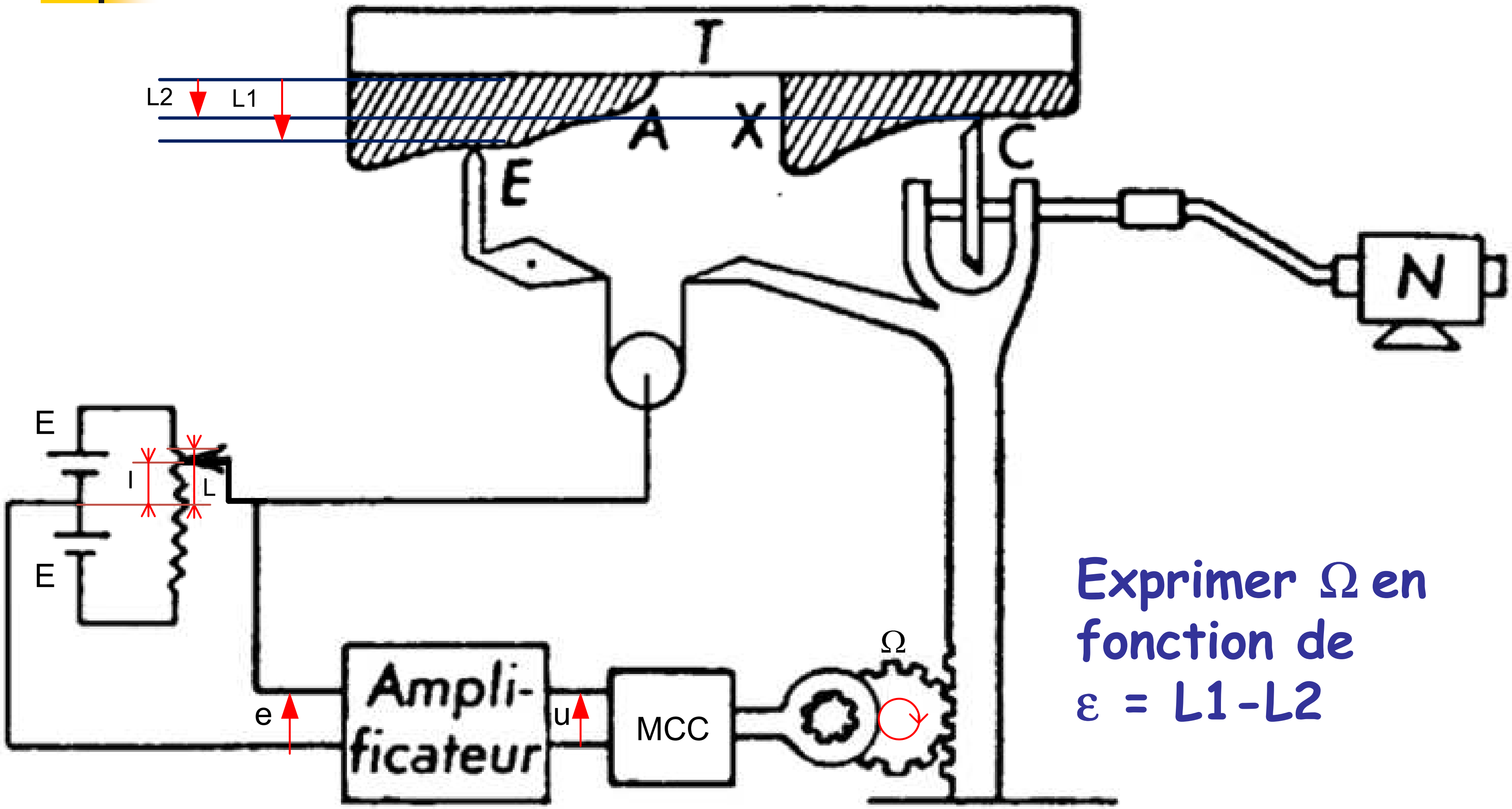
- **Défaut essentiel d'un tel dispositif :**
  - La qualité du réglage de Ω par U dépend de la fidélité de la chaîne d'action (mauvaise pour les organes de puissance).
  - Si Tr augmente Im augmente => Ω diminue. Le système ne s'adapte pas aux perturbations extérieures.

Un système en chaîne ouverte ne dispose d'aucun moyen de compenser l'effet d'une perturbation agissant sur sa sortie.

Systèmes en boucle fermée

- Exemple 1 : Meule reproductrice



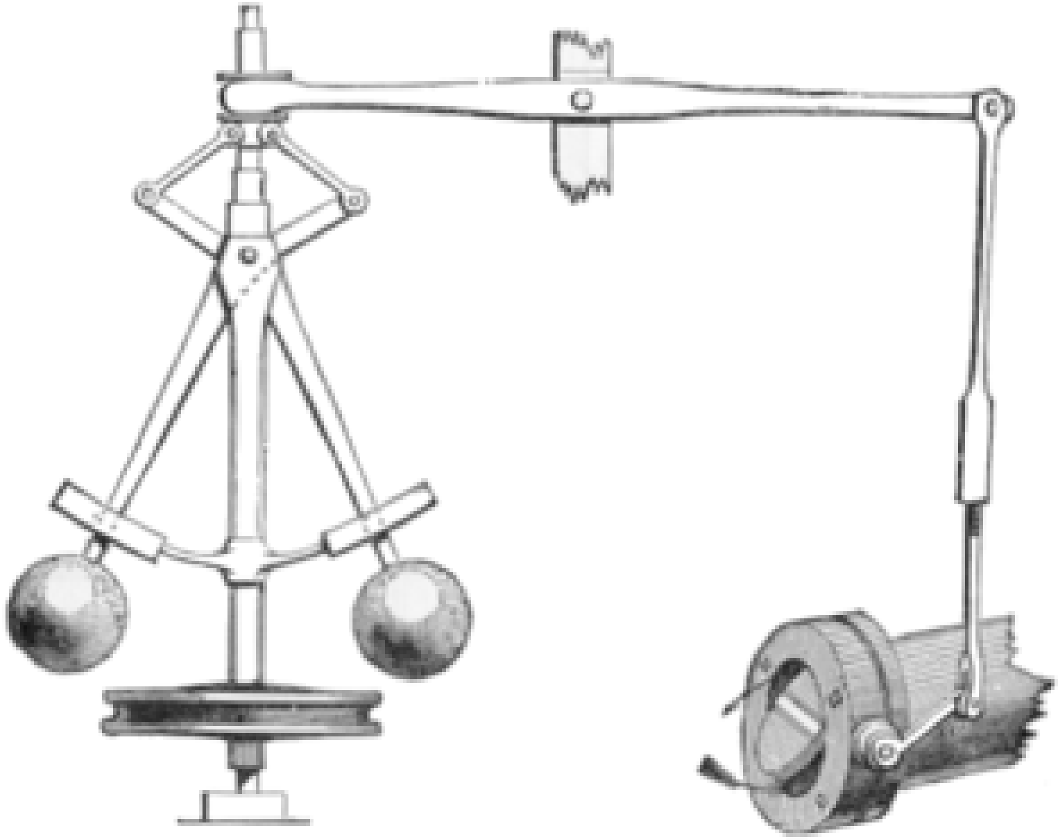


Exprimer Ω en fonction de $\varepsilon = L1 - L2$

DT1

Systèmes en boucle fermée

- Exemple 2 : Régulateur de Watt



Diapositive 7

DT1

Le problème
Il est important, pour ne pas détériorer les mécanismes de transmission mécanique, que la vitesse d'une machine à vapeur soit aussi constante que possible. Si quelques écarts sont, à la rigueur, admissibles pour l'entraînement d'une pompe de mine, des différences de vitesse du même ordre peuvent compromettre le fonctionnement d'une filature ou de métiers à tisser, dont la mécanique est délicate.

Comment assurer la régulation ?
La régulation passive [modifier]
Les chaudières étaient, bien entendu, munies, pour des raisons de sécurité, d'une soupape, laissant filer la vapeur chaque fois que celle-ci atteignait une pression dangereuse (la combustion du charbon qui la chauffait n'étant pas forcément très régulière, celui-ci étant enfourné par pelletées entières. L'usage de la seule soupape comme organe régulateur, en faisant fonctionner la chaudière au voisinage du point limite, aurait représenté un gaspillage : toute vapeur que l'on laisse échapper, c'est de l'argent perdu. De plus, ce système de régulation passive ne réalisait que la moitié d'une régulation : capable de limiter une pression excessive, il était incapable de remonter une pression insuffisante.

Régulation active
Watt comprit qu'il y aurait avantage à faire agir un régulateur automatique non sur la pression de vapeur, mais sur une vanne d'admission de la vapeur en fonction de la vitesse de l'axe. Comment associer à cette vitesse une position mécanique pouvant contrôler la valve ? Watt imagina d'utiliser la force centrifuge : associer par un engrenage la rotation de l'axe - en général horizontal - à une rotation verticale d'un autre axe comportant deux boules situées aux extrémités d'un pantographe : plus l'axe tournait vite et plus les boules s'écartaient, ce qui avait pour effet de remonter la partie inférieure du pantographe. Celle-ci pouvait alors être utilisée pour commander la vanne d'admission de vapeur.

Si, à la suite d'une combustion plus forte ou d'une moindre utilisation de la puissance fournie, la vitesse de rotation augmente,

* les boules tournent plus vite
* elles s'écartent davantage par force centrifuge,
* la base du pantographe remonte,
* et l'admission de vapeur est diminuée - tendant donc à réduire cette même vitesse d'autant qu'il le faut pour revenir au point de consigne.

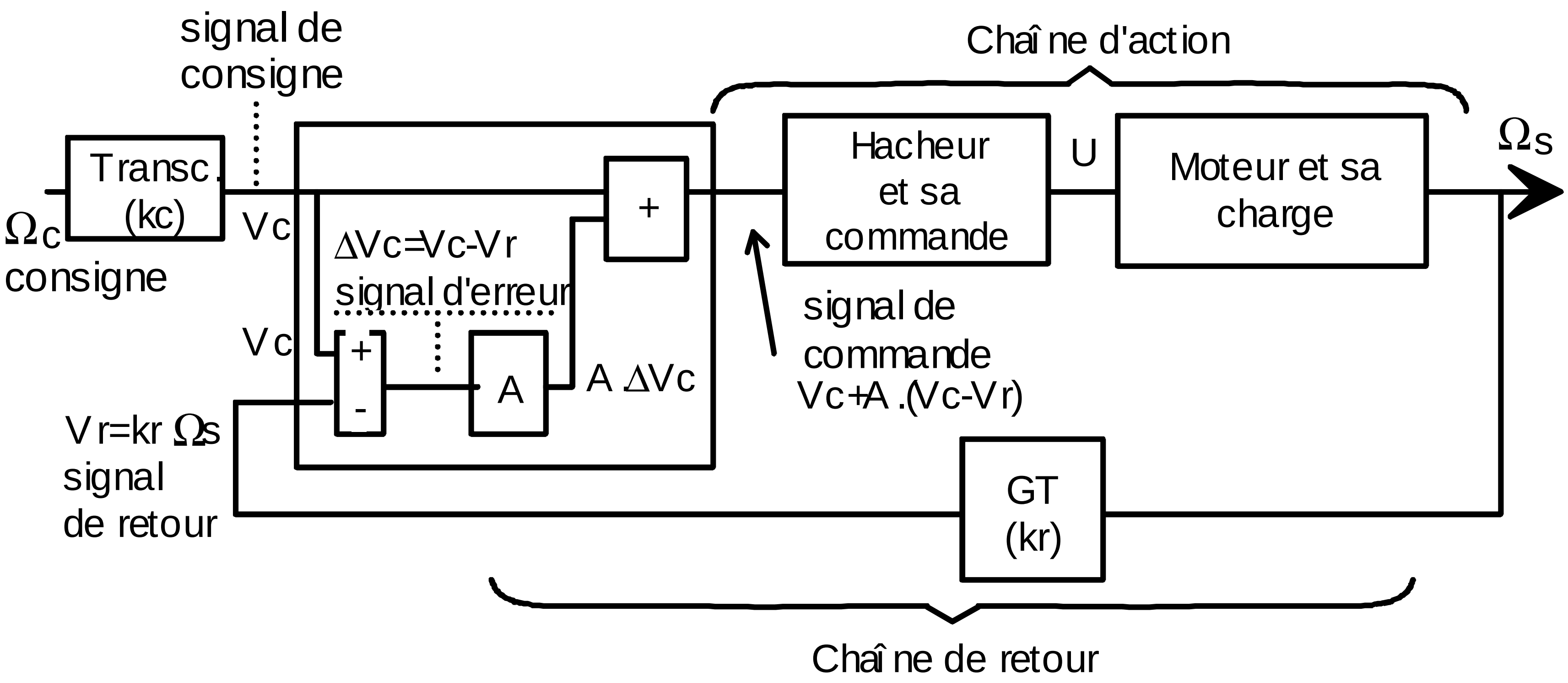
Si, inversément, à la suite d'un ralentissement de la combustion ou d'une charge supérieure de l'atelier cette vitesse diminue,

* les boules tournent moins vite,
* elles se rapprochent en raison de leur poids du fait que la force centrifuge diminue
* la base du pantographe baisse,
* et l'admission de vapeur est augmentée - tendant donc du même coup à augmenter cette vitesse autant qu'il le faut pour revenir sur le point de consigne.

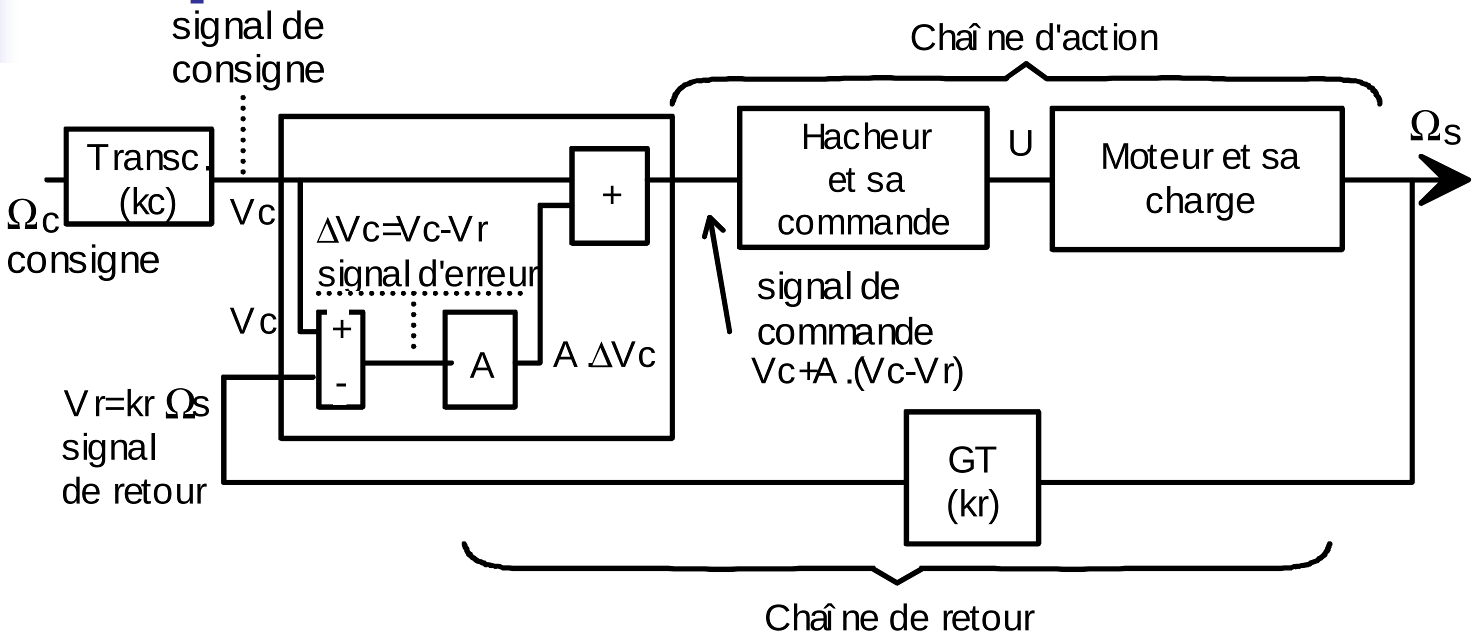
Daniel; 20/10/2006

Systèmes en boucle fermée (2)

- Exemple 3 : moteur à c.c. + source de tension + génératrice tachimétrique + charge



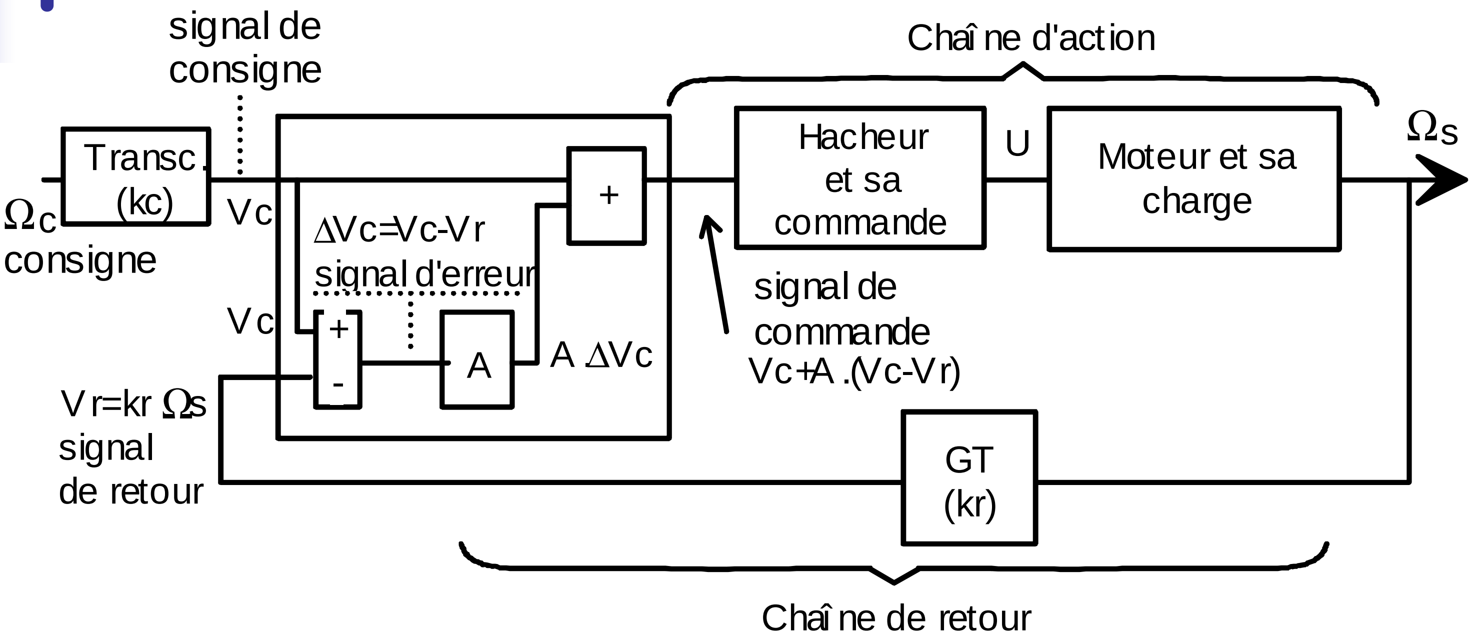
Comportement vis-à-vis de l'entrée



- $\Omega c \nearrow \Rightarrow (Vc-Vr) \nearrow \Rightarrow$ Umoteur $\nearrow$ $\Omega s \nearrow$
- $Vr = kr.\Omega s. \nearrow \Rightarrow (Vc-Vr) \searrow$
- quand $\Omega s = \Omega c \Rightarrow (Vc-Vr) = 0$

La sortie Ωs du système est dite asservie à l'entrée principale Ωc. Un tel système bouclé est appelé asservissement.

Comportement vis-à-vis des perturbations



- TR↗ ⇨ Ωs↘ ⇨Vr=kr.Ωs. ↘ (Vc-Vr)↗ ⇨ Umoteur ↗ Ωs ↗
- Vr=kr.Ωs.↗ ⇨ (Vc-Vr) ↘ quand Ωs = Ωc ⇨ (Vc-Vr) = 0

Le système a réagi automatiquement à la perturbation. Le système régule la sortie vis à vis des perturbations.

Comportement des systèmes bouclés

Tout système bouclé a un aspect d'asservissement vis à vis de l'entrée principale et un aspect régulation vis à vis des perturbations.

Qualités d'un asservissement

- **Stabilité.**
- Cause d'instabilités d'un asservissement
  - Sens de la réaction inversé.
  - Valeur très élevée de l'amplification A.

Un système asservi doit être stable.
Tout système asservi est réglé pour présenter un bon degré de stabilité.

Qualités d'un asservissement (2)

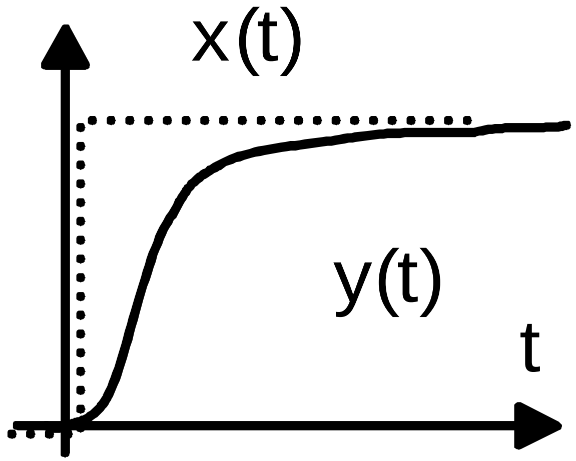
- **Précision**

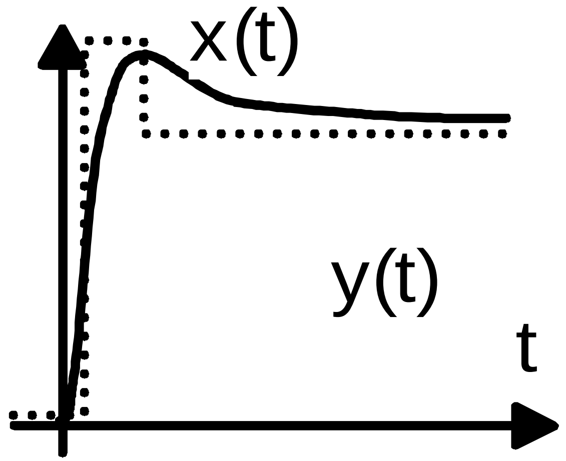
La sortie doit être le proche possible de la consigne.

Un asservissement doit être précis.

Qualités d'un asservissement (3)

- **Rapidité de réponse**
  - Un asservissement doit présenter **un régime transitoire le plus court possible**.
  - Comme on ne peut modifier l'inertie propre du système, on ne peut améliorer la rapidité d'un système qu'en en modifiant le signal de commande.





Fonction de transfert d'un SA

- Le calcul de la grandeur de sortie est grandement facilité si on associe la grandeur de sortie à la grandeur d'entrée à l'aide d'un polynôme à la place d'une équation différentielle -> transformation de Laplace.
- La transformation de Laplace permet d'associer :
  - A une équation différentielle linéaire : un polynôme à coefficients constants.
  - A une solution d'équation différentielle : un zéro du polynôme.

Transformée de Laplace : définition

- A une fonction $f(t)$, **nulle pour t < 0**, on fait correspondre une fonction $F(p)$ de variable complexe ***p*** appelée transformée de Laplace de notée $F(p)=L\,f(t)$.

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

Exemple

$$f(t)=e^{-at} \quad ; \quad F(p)=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-pt}dt=\left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a+p}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{p+a}$$

Transformée de Laplace (2)

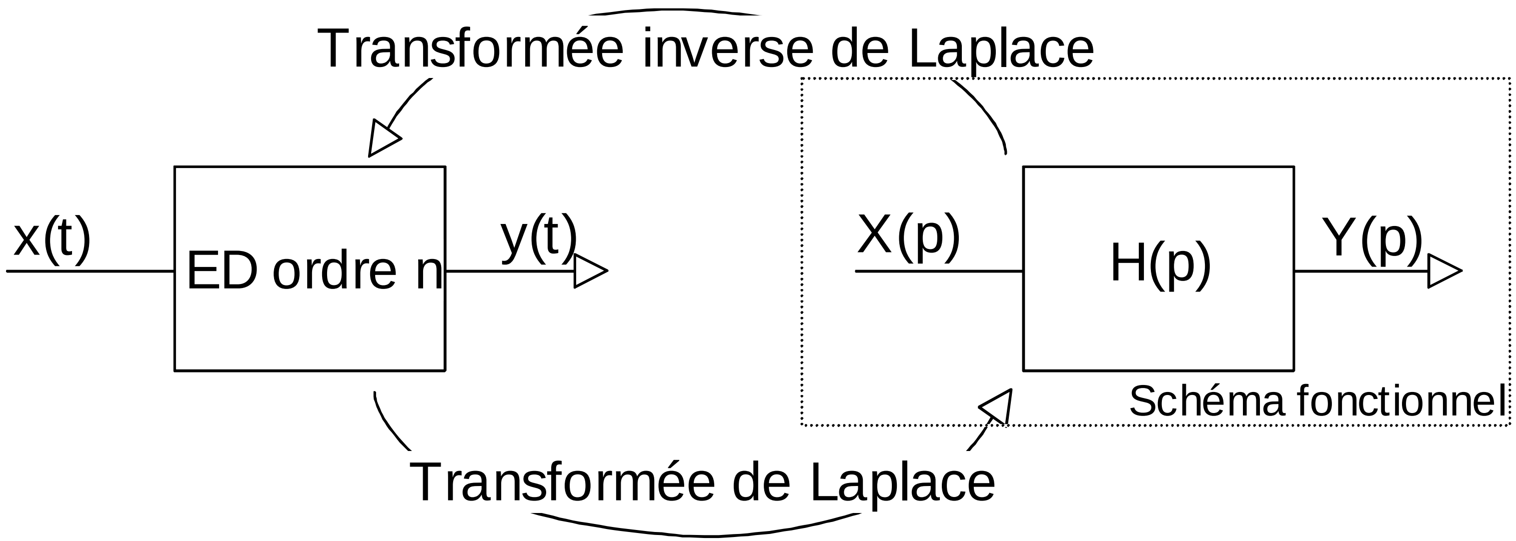


Image de la dérivée d'une fonction

On démontre que

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$$

$f(0^+)$ est la limite de *f*(*t*) lorsque *t* tend vers zéro par valeurs positives.

On utilisera toujours des fonctions du temps nulles pour $t < 0$.

La transformation de Laplace remplace une dérivation par un produit par p
De même elle remplace une intégration par une division par p

Passage de la FT harmonique à la FT opérationnelle

On remplace $j\omega$ par p, $(j\omega)^2$ par p^2.
La réciproque est applicable.

Valeur finale et initiale

- **Théorème de la valeur finale**

Limite de f(t) quand $t \to \infty$
=
Limite de pF(p) quand $p \to 0$

- **Théorème de la valeur initiale**

Limite de f(t) quand $t \to 0$
=
Limite de pF(p) quand $p \to \infty$

Rappels sur la FT harmonique

- Lorsque l'entrée du système est une grandeur sinusoïdale, on associe au système une fonction de transfert F(jω).
  - Exemple : Fonction de transfert du deuxième ordre :

$$\underline{\mu} = \frac{1}{1-\delta_0^2\omega^2 + 2m\delta_0\omega j} \quad \text{avec } \delta_0 > 0, \quad m > 0$$

En posant $\delta_0 = \dfrac{1}{\omega_0}$ et $\dfrac{\omega}{\omega_0} = x$

$$\underline{\mu} = \frac{1}{1-x^2+2mxj}$$

$$|\underline{\mu}| = \rho = \sqrt{\frac{1}{\left(1-x^2\right)^2 + \left(2mx\right)^2}} \; ; \; \mathrm{Arg}(\underline{\mu}) = \theta = \arctan\frac{-2mx}{1-x^2}$$

Diagramme de Bode

- On trace $\rho_{db} = F(\omega)$ et $\theta = F(\omega)$
- Attention la FT doit être mis sous la forme

$$\frac{(1+j\delta_1\omega)(1+j\delta_2\omega)\ldots}{(1+j\delta_1'\omega)(1+j\delta_2'\omega)\ldots}$$

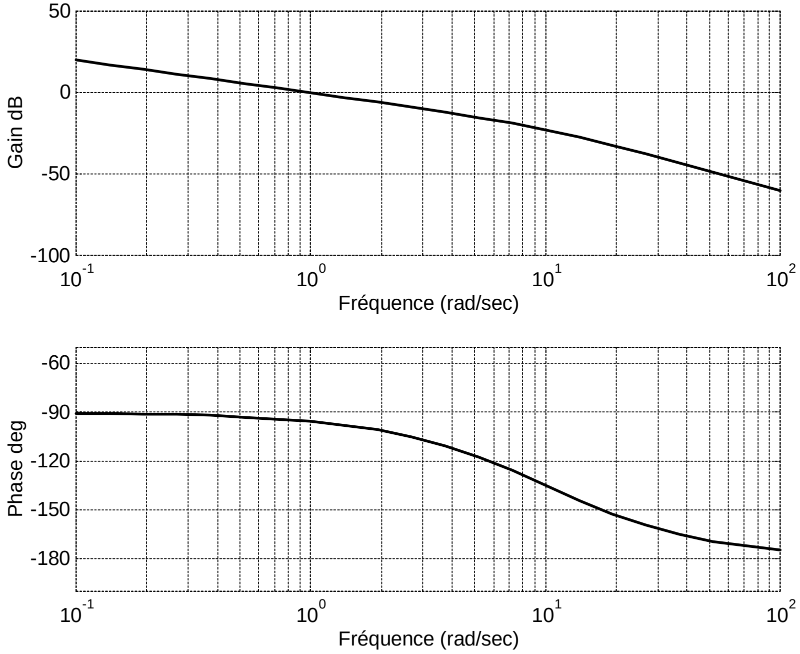


Diagramme de Black

- Condensé du diagramme de Bode
- Graduer le lieu en fréquences.
- Si le gain statique est différent de 0dB, le lieu doit être translaté parallèlement à l'axe des ordonnées d'une quantité égale à K dB.

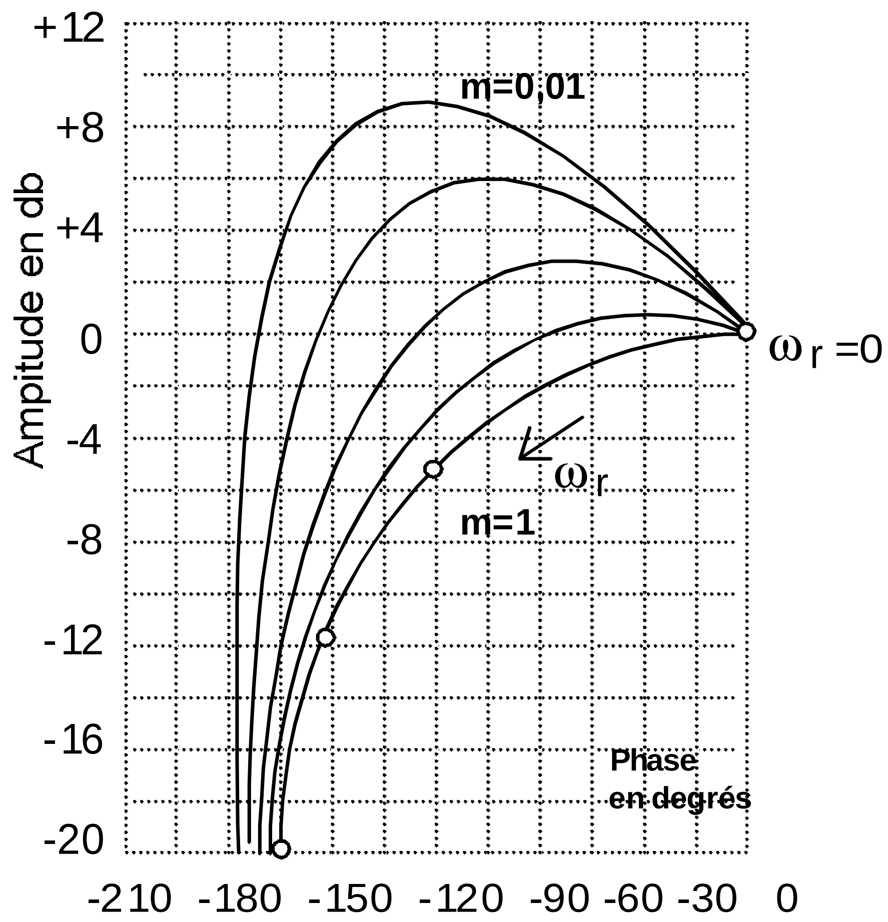
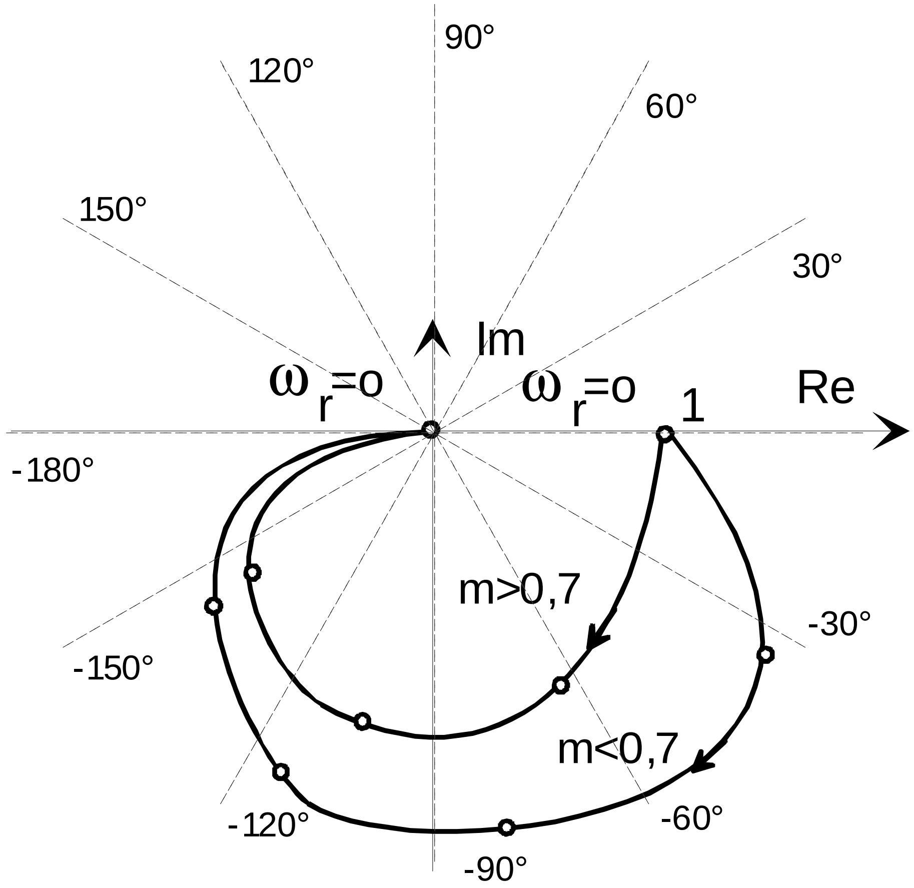


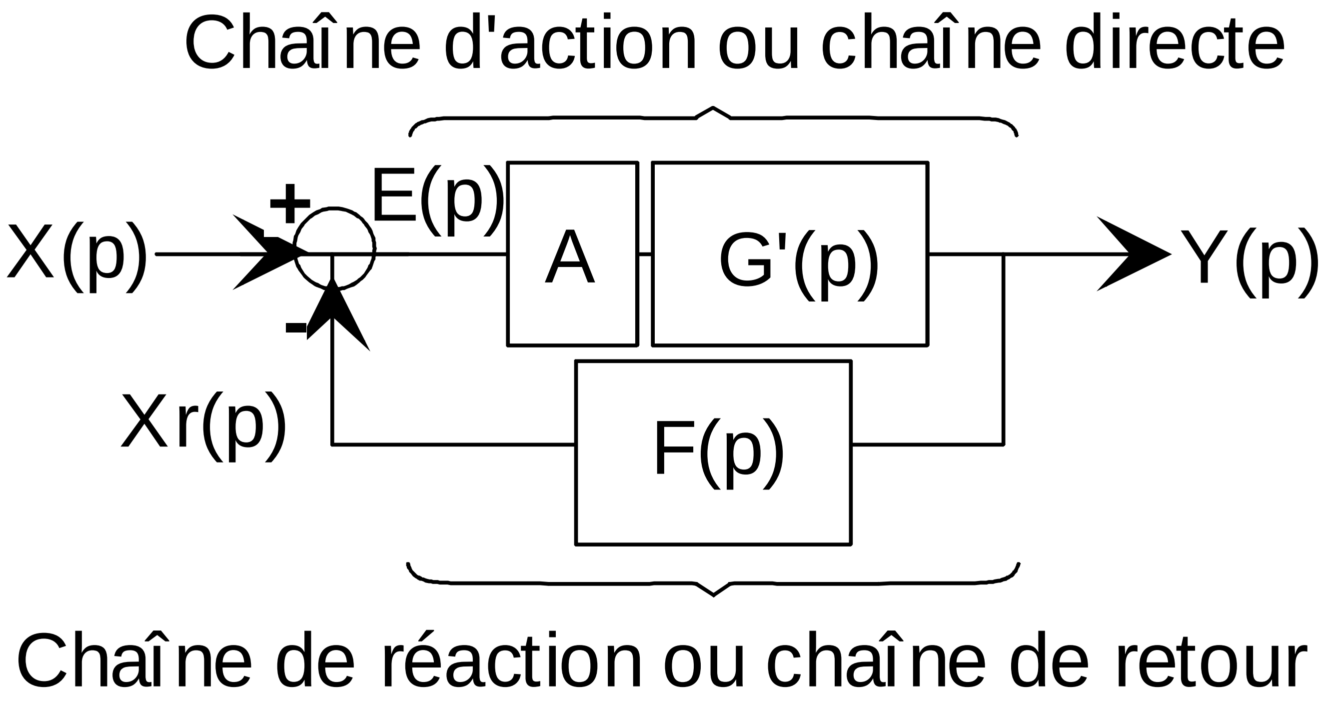
Diagramme de Nyquist

- Construction immédiate à partir du diagramme de Bode.
  On relève pour chaque fréquence :
  - Le module en valeur réduite (A(jω)/A0)
  - La phase que l'on reporte sur le plan complexe.
- Ne pas oublier :
  - De graduer le lieu en fréquences ou en pulsations,
  - De diviser les modules par A0 (valeur de A pour ω = 0) si le gain statique est différent de 1.

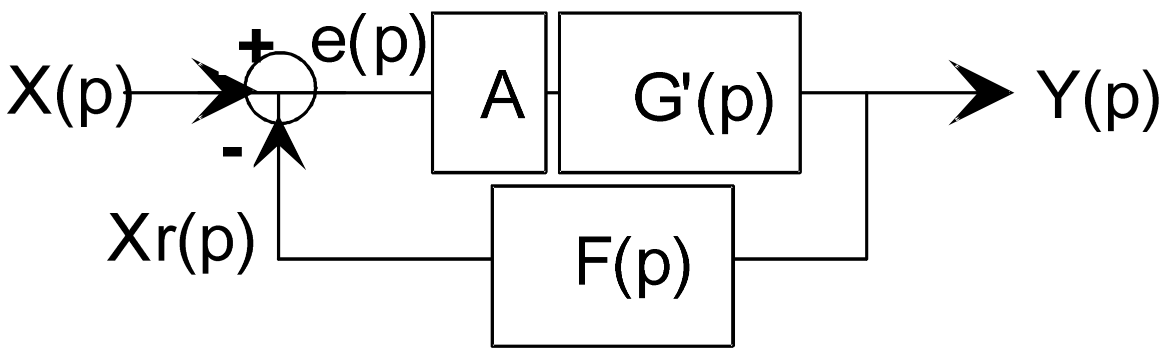


Calcul des systèmes asservis linéaires

- **boucle ouverte, boucle fermée**

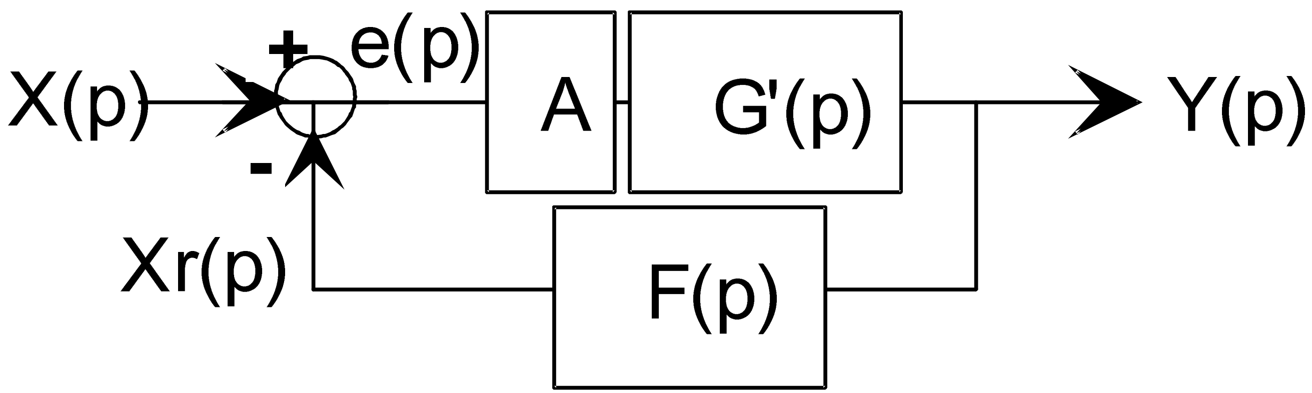


Fonction de transfert de la chaîne directe



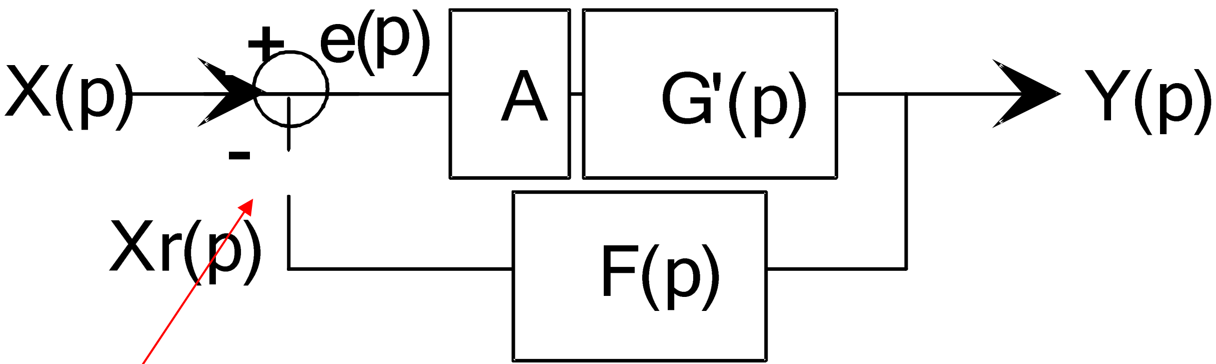
$$G(p) = A.G'(p) = \frac{Y(p)}{e(p)}$$

Fonction de transfert de la chaîne de retour



$$F(p) = \frac{X_r(p)}{Y(p)}$$

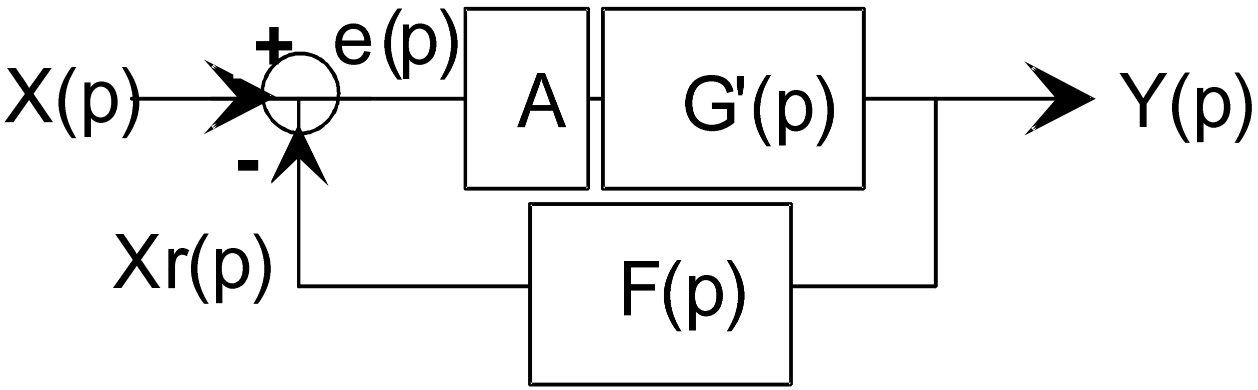
Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)



$$T(p)=\frac{X_r(p)}{e(p)}=G(p).F(p)$$

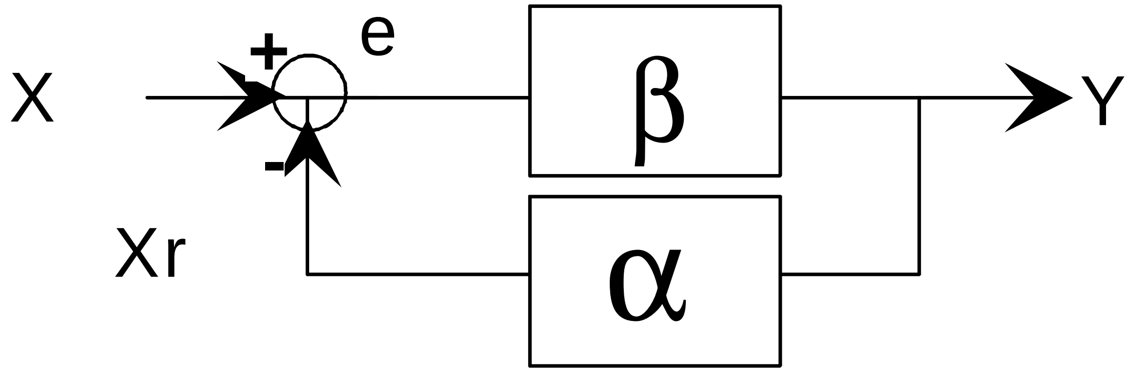
Remarquer la coupure

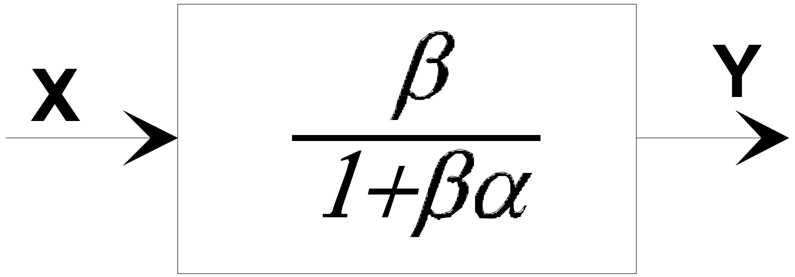
Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)



$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

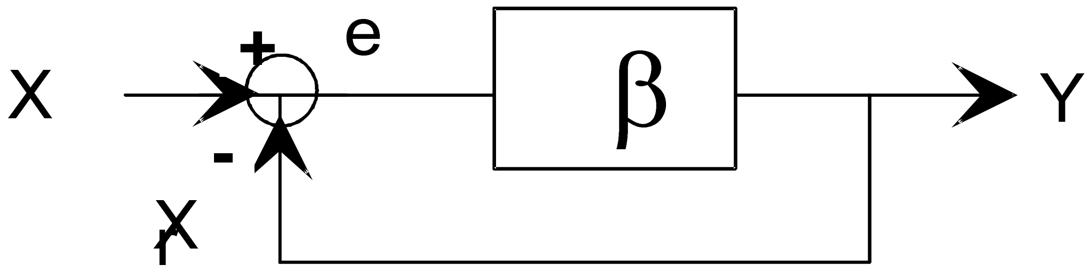
Formule de Black

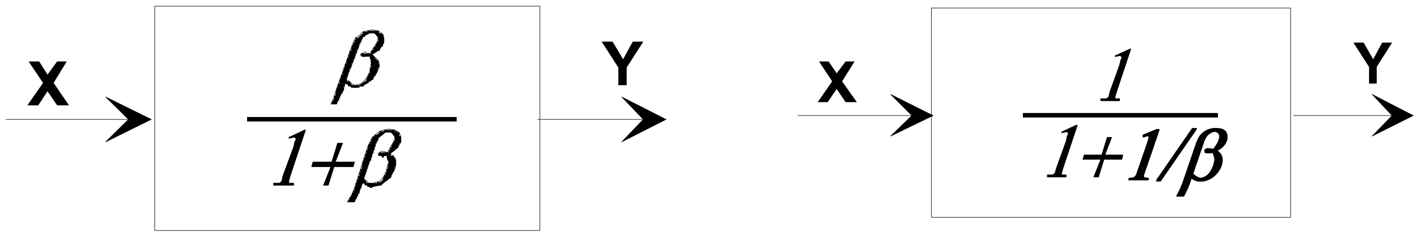




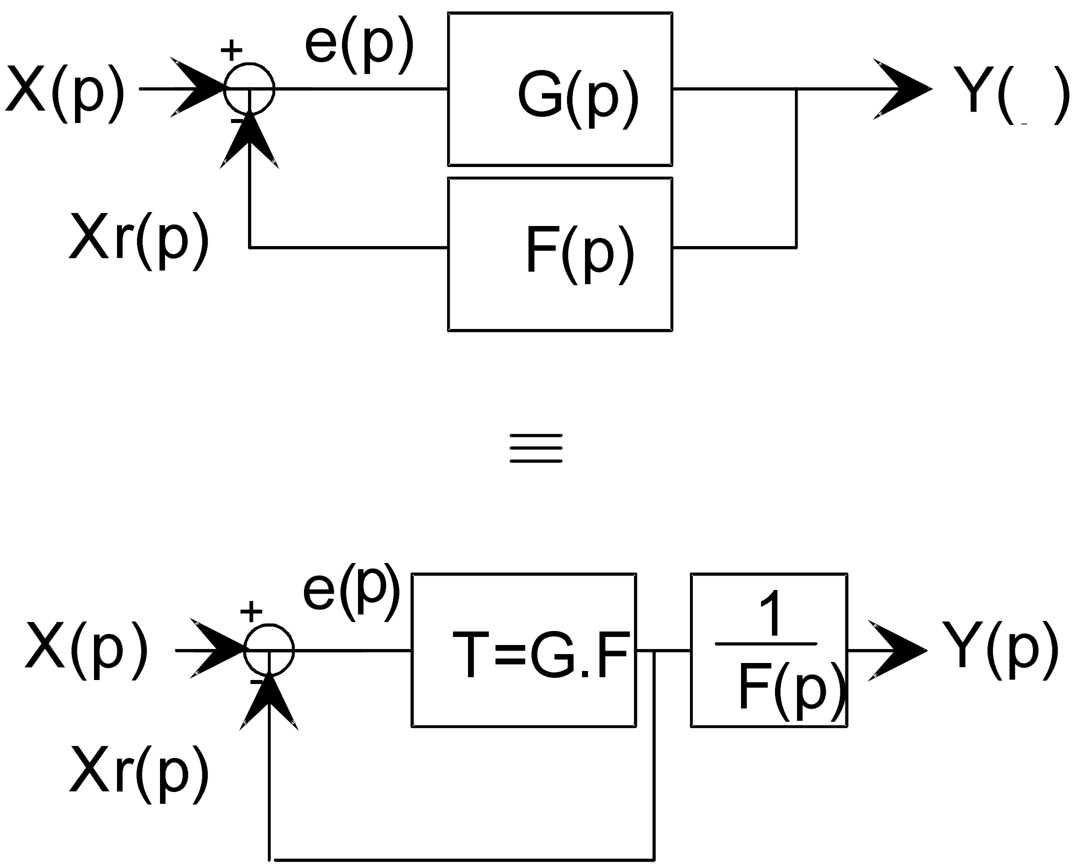
$$\frac{\beta}{1+\beta\alpha}$$

Formule de Black avec retour unitaire





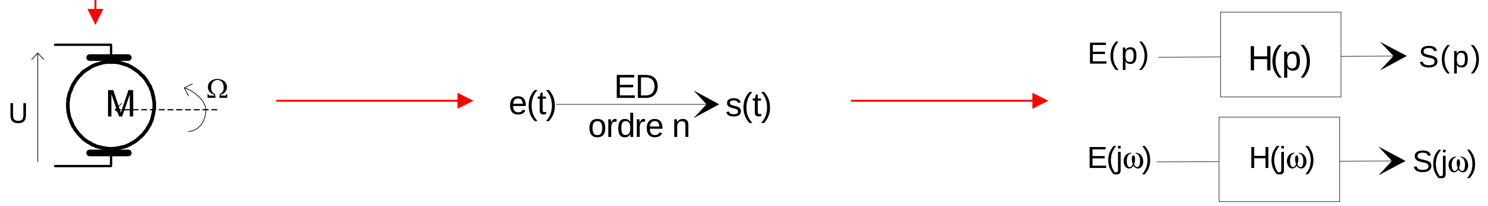
Passage du cas général au retour unitaire



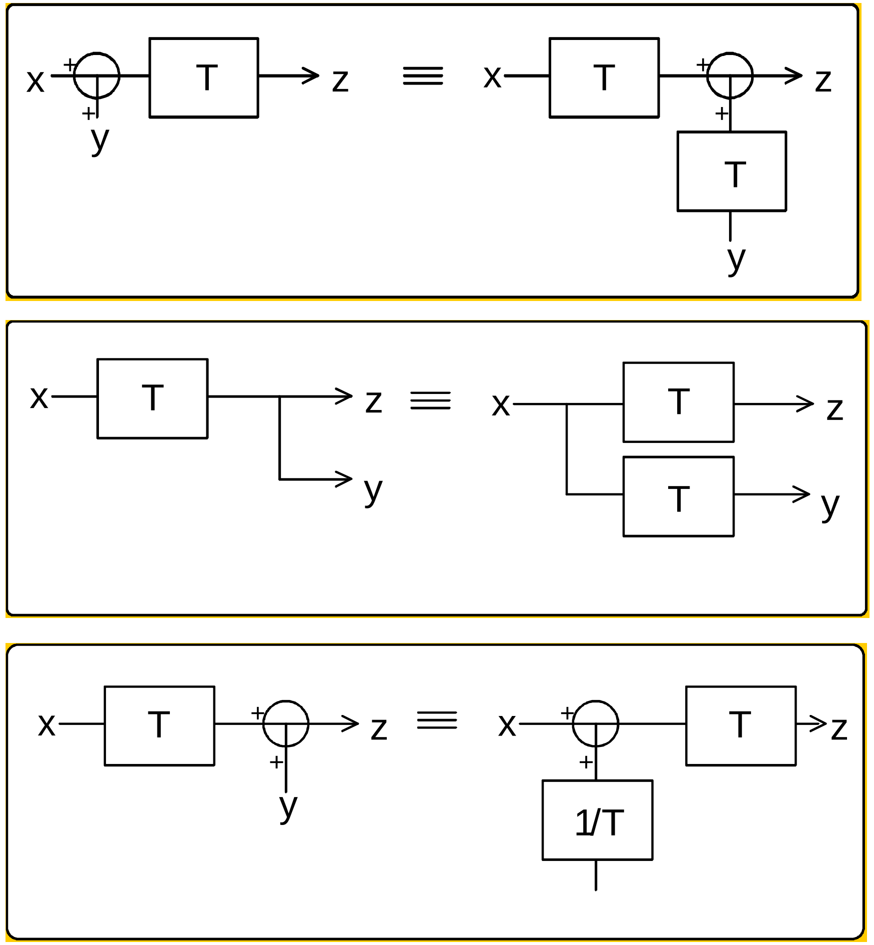
Mise en équation d'un système asservi linéaire

- **Règles d'élaboration**

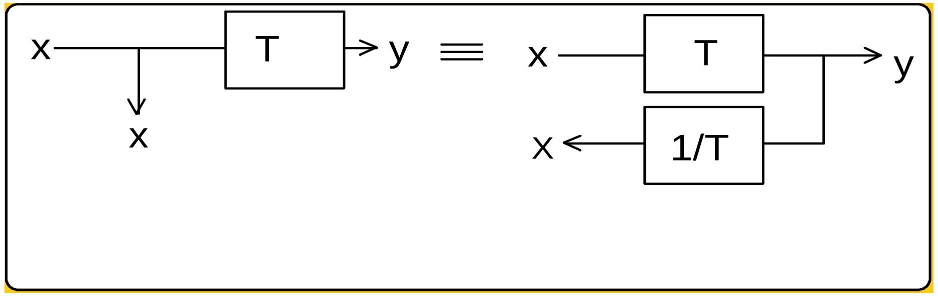
1. Identifier l'entrée (les entrées) et la sortie du système à l'étude.
2. Etablir ED de fonctionnement reliant les sorties aux entrées
3. Tracer le schéma fonctionnel correspondant.
4. Réduire le schéma obtenu pour le mettre sous la forme standard.
5. Après la réduction appliquer la formule de *Black*

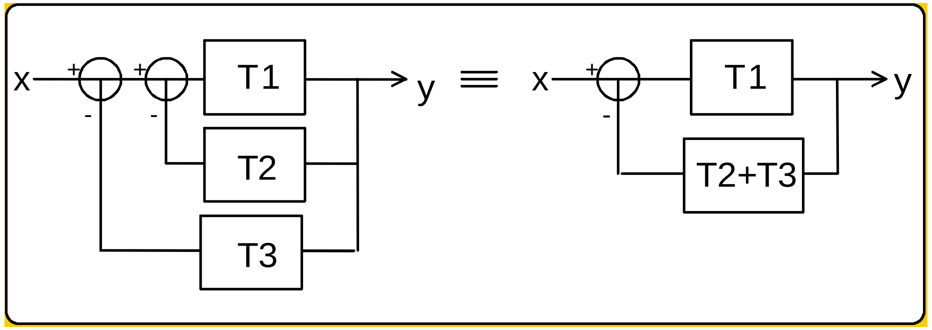


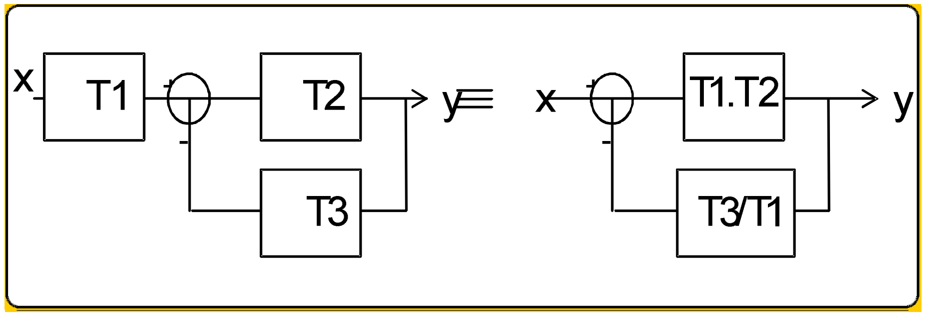
Principales règles de réduction d'un schéma fonctionnel



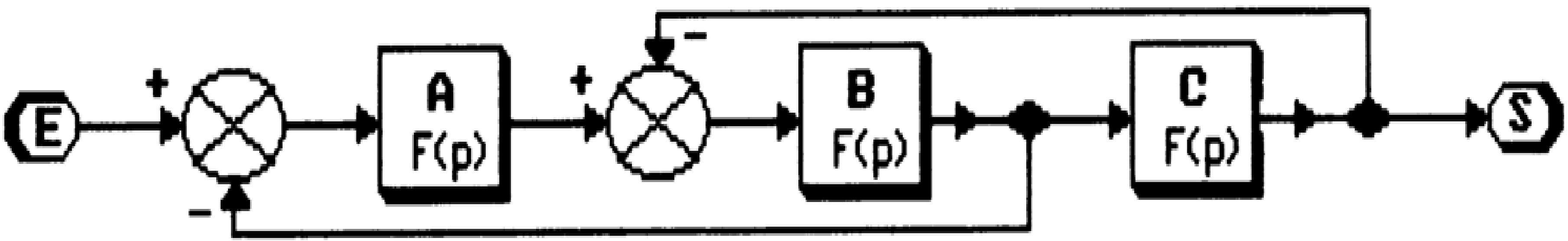
Principales règles de réduction d'un schéma fonctionnel (2)







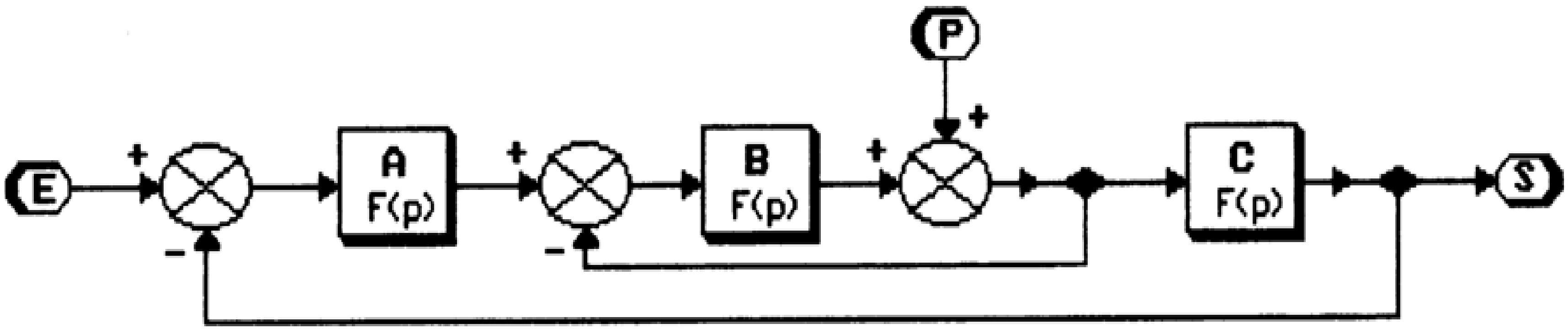
Réduction d'un schéma fonctionnel
Exemple 1



Donner l'expression de la transmittance $\mathbf{H(p)} = \dfrac{\mathbf{S(p)}}{\mathbf{E(p)}}$:

1. par calcul ;
2. par réduction du schéma-bloc.

Réduction d'un schéma fonctionnel
Exemple 2

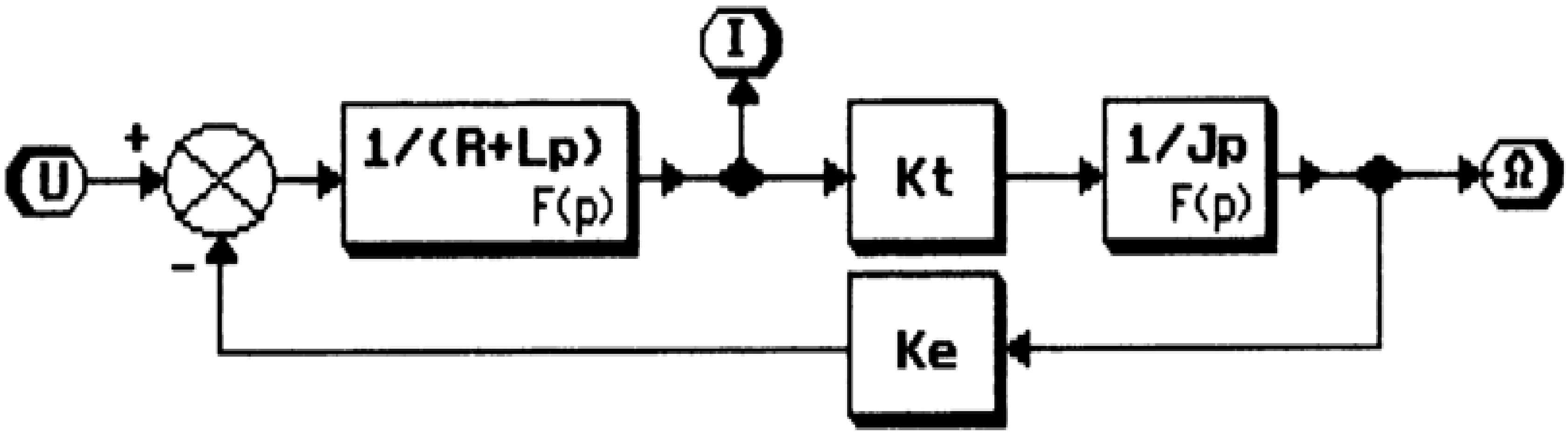


1. Calculer les deux transmittances $\mathbf{H_1(p)} = \left(\dfrac{\mathbf{S(p)}}{\mathbf{E(p)}}\right)_{\mathbf{P=0}}$ et $\mathbf{H_2(p)} = \left(\dfrac{\mathbf{S(p)}}{\mathbf{P(p)}}\right)_{\mathbf{E=0}}$:

1.1. par calcul ;
1.2. par réduction du schéma-bloc.

2. En déduire l'expression **S(p) = f(E(p) + P(p))**

Réduction d'un schéma fonctionnel
Exemple 3



Exprimer les fonctions de transfert **vitesse/tension** et **courant/tension** du moteur

Exemple 1 : moteur à courant continu alimenté à travers une inductance de forte valeur

- Équation électrique:

$$U(t) = L\frac{di}{dt} + Ri(t) + K\Omega(t) \quad \text{avec } K = K_1\Phi$$

- **Le système est toujours étudié pour les variations.** Ω(t) sont les variations de la vitesse autour de Ω_0 en fonction de *u*(t). Si les système comporte des constantes (donc indépendantes de la grandeur d'entrée), elles ne doivent pas apparaitre dans l'équation en variations, mais uniquement dans l'équation pour t-> ∞ (régime statique).

- Équation mécanique : l'induit se compose d'une inertie d'un moment de frottement visqueux : $F\Omega$ et d'un moment de frottement sec : Cs. L'équation en variation est :

$$K.i(t) - F\Omega(t) = J\frac{d\Omega}{dt}$$

Exemple 1 : moteur à courant continu alimenté à travers une inductance de forte valeur (2)

- La résolution du système est simplifiée par l'utilisation de la transformée de Laplace. On pose:
  - $\Omega(p)$ TL des variations de Ω autour de Ω_0, $U(p)$ TL des variations de u(t) autour de U_0,
  - I(p) TL des var. de i(t) autour de I_0, $T_m(p)$ TL des variations du couple moteur autour de T_0.
  - Des ED on tire immédiatement :

$$J.p.\Omega(p) + F.\Omega(p) = K.I(p) \qquad (1)$$

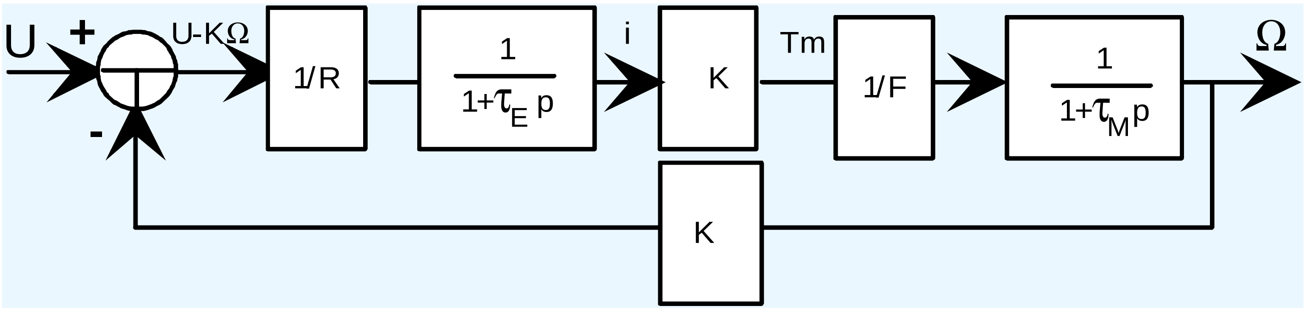
$$U(p) = L.p.I(p) + R.I(p) + K.\Omega(p) \qquad (2)$$

De (2) on tire $I(p) = \dfrac{U\text{-}K.\Omega(p)}{Lp+R} = \dfrac{1}{R} \cdot \dfrac{U\text{-}K.\Omega(p)}{1+\delta_E p}$ avec $\delta_E = \dfrac{L}{R}$ (3)

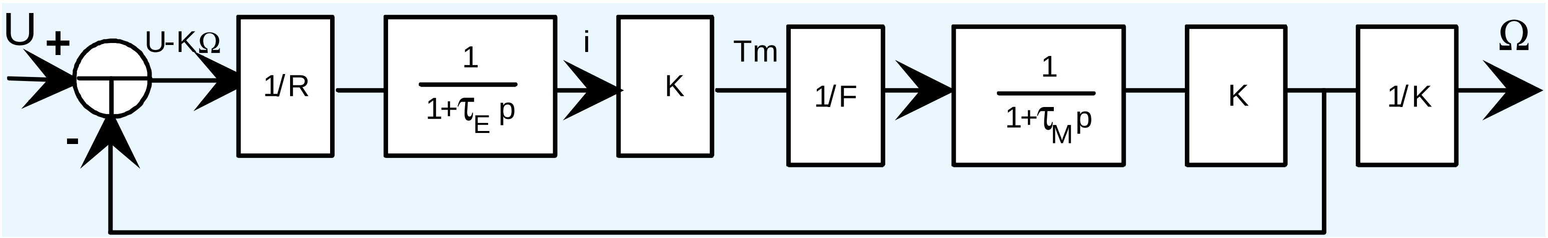
De (1) on tire $\Omega(p) = \dfrac{K.I(p)}{J.p+F} = \dfrac{1}{F} \cdot \dfrac{K.I(p)}{1+\delta_M p}$ avec $\delta_M = \dfrac{J}{F}$ (4)

Exemple 1 : moteur à courant continu alimenté à travers une inductance de forte valeur (3)

$$I(p)=\frac{1}{R}\cdot\frac{U - K.\Omega(p)}{1+\delta_E\,p} \qquad \Omega(p)=\frac{1}{F}\cdot\frac{K.I(p)}{1+\delta_M\,p}$$

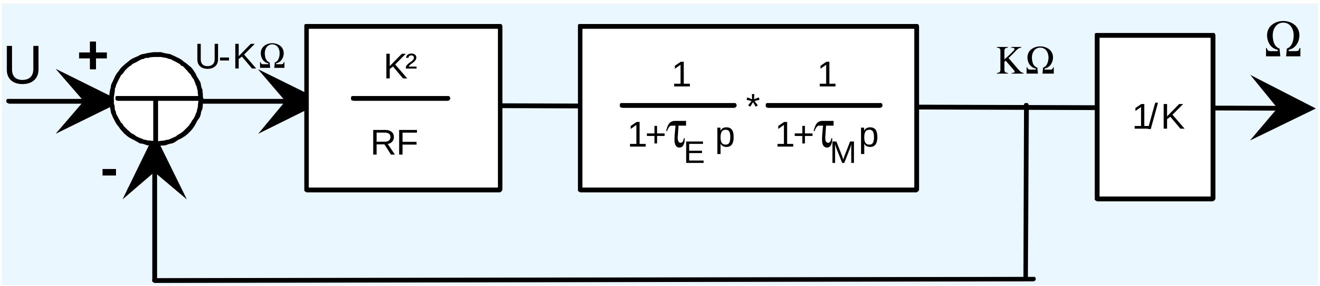


Passage au retour unitaire

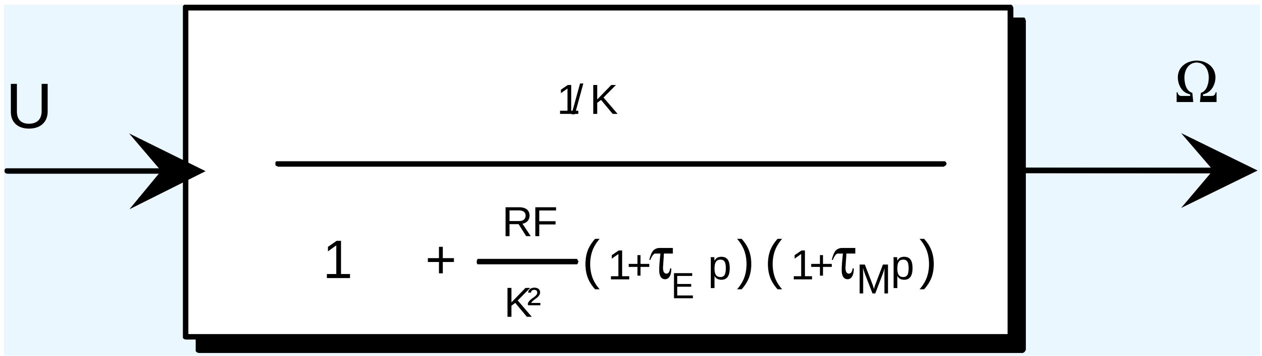


Exemple 1 : moteur à courant continu alimenté à travers une inductance de forte valeur (4)

Simplification

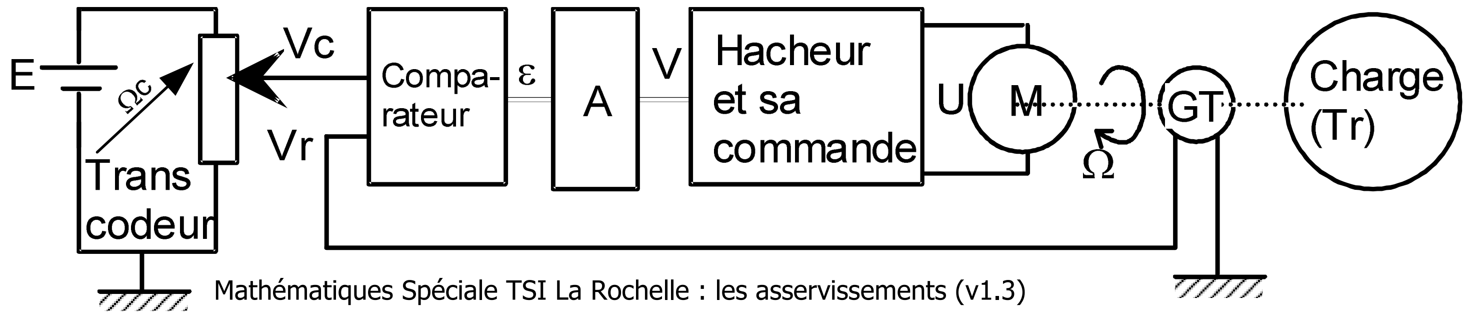


Application de la formule de Black

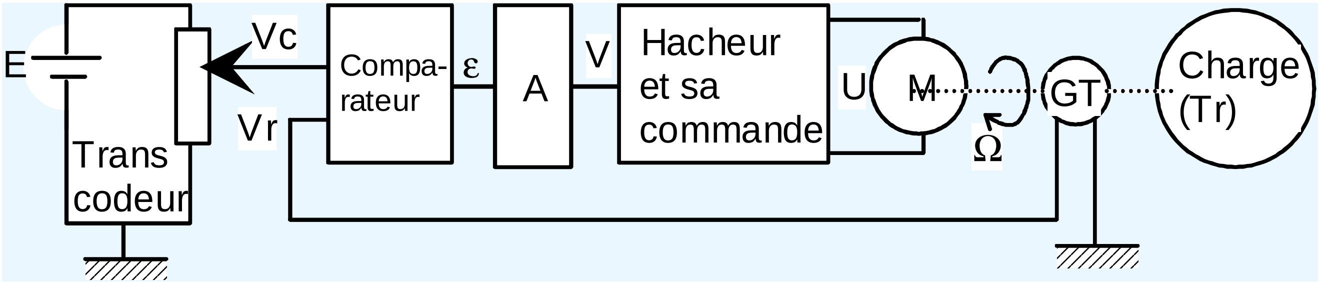


Exemple 2 : asservissement de vitesse d'un courant continu entraînant une charge

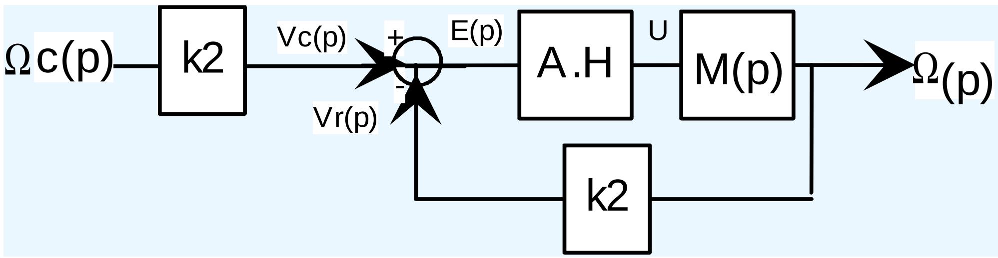
- L'ensemble est composé de :
  - M : moteur à courant continu à flux constant (constante de FEM et de couple k_1),
  - Ensemble moteur+charge inertie totale J, de frottements secs négligeables, couple de frottements visqueux f. Ω.
  - GT : génératrice tachymétrique $Vr=k_2\ \Omega$
  - Un transcodeur fournissant l'image de la consigne de vitesse $Vc=k_2\Omega_c$
  - K3 est la fonction de transfert de l'ensemble hacheur et sa commande . On supposera le hacheur parfait.
  - A est un amplificateur d'écart réglable,
  - Ω_c vitesse de consigne affichée sur le transcodeur,
  - V_c tension de consigne à la sortie du transcodeur,
  - V_r tension de retour générée par la GT.
- Hypothèses :
  - La constante de temps électrique $\tau_E << \tau_M$ => l'inductance totale L de l'induit + l'inductance de lissage du hacheur négligée,
  - Le moteur ne présente aucune perte autre que celle par effet Joule dans son induit,

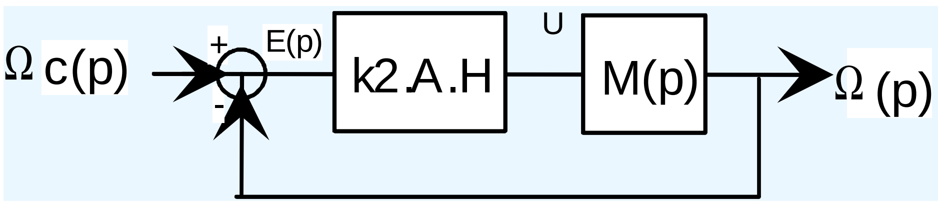


Exemple 2 : asservissement de vitesse d'un courant continu entraînant une charge (2)

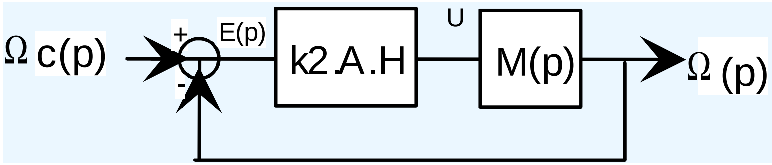


- Toutes les grandeurs concernent les variations des grandeurs physiques réelles autour de l'état d'équilibre statique initial ⇒ schéma opérationnel





Exemple 2 : asservissement de vitesse d'un courant continu entraînant une charge (2)



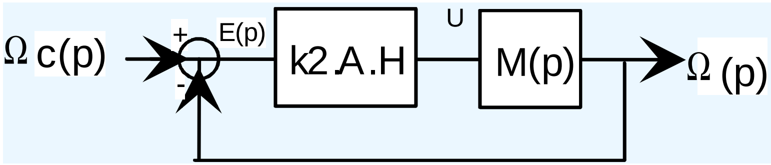
- Toutes les grandeurs concernent les variations des grandeurs physiques réelles autour de l'état d'équilibre statique initial $\Rightarrow$ schéma opérationnel
  - Soit $M(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$ fonction de transfert en vitesse du MCC. Déterminons M(p)

$$U = Ri + k_1\Omega \quad ; \qquad J\frac{d\Omega}{dt} = k_1 i - f\Omega \Rightarrow i = \frac{J}{k_1}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{f}{k_1}\Omega$$

$$U = \frac{RJ}{k_1}\frac{d\Omega}{dt} + \left(\frac{Rf+k_1^2}{k_1}\right)\Omega \Rightarrow U(p) = \frac{RJ}{k_1}p.\Omega(p) + \left(\frac{Rf+k_1^2}{k_1}\right)\Omega(p)$$

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1}{\left(\frac{Rf+k_1^2}{k_1}\right)+\frac{RJ}{k_1}p} = \frac{\frac{k_1}{Rf+k_1^2}}{1+\frac{RJ}{Rf+k_1^2}p} = \frac{\frac{k_1}{Rf+k_1^2}}{1+\tau p} = M(p)$$

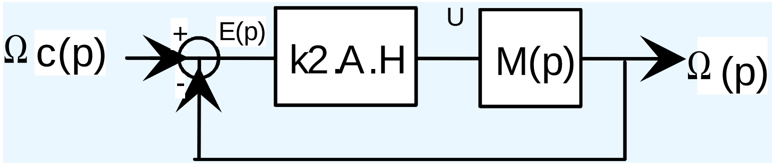
Exemple 2 : asservissement de vitesse d'un courant continu entraînant une charge (3)



$$FTBO : T(p) = A.k_2 k_3 . \frac{\dfrac{k_1}{Rf + k_1^2}}{1+\tau.p} = Ak \frac{1}{1+\tau.p} \quad \text{avec } k = \frac{k_2 k_3 k_1}{Rf + k_1^2}$$

$$FTBF : H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_C(p)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{A.k}(1+\tau.p)} = \frac{A.k}{1+A.k+\tau.p} = \frac{\dfrac{A.k}{1+A.k}}{1+\dfrac{\tau}{1+A.k}p}$$

Exemple 2 : asservissement de vitesse d'un courant continu entraînant une charge (3)



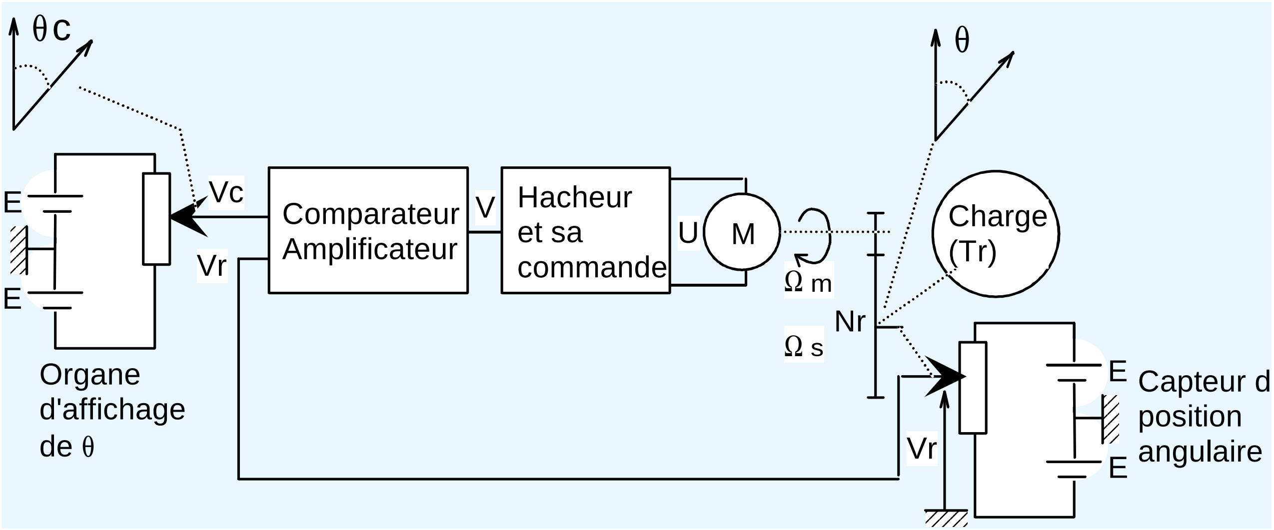
$$FTBF : H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_C(p)} = \frac{1}{1+\frac{1+\tau.p}{A.k}} = \frac{A.k}{1+A.k+\tau.p} = \frac{\frac{A.k}{1+A.k}}{1+\frac{\tau}{1+A.k}p}$$

Si $A.k \gg 1$, on a $H_0 \approx 1$ et $\tau' = \tau / A\,k \ll \tau$.

En augmentant l'amplification *A* :

- ✓ **on améliore la précision en réduisant l'erreur statique**
- ✓ **on augmente la rapidité du système**

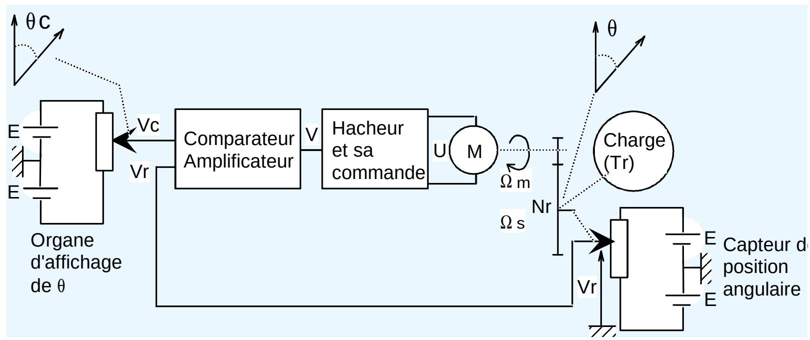
Exemple 3 : Asservissement de position d'une antenne

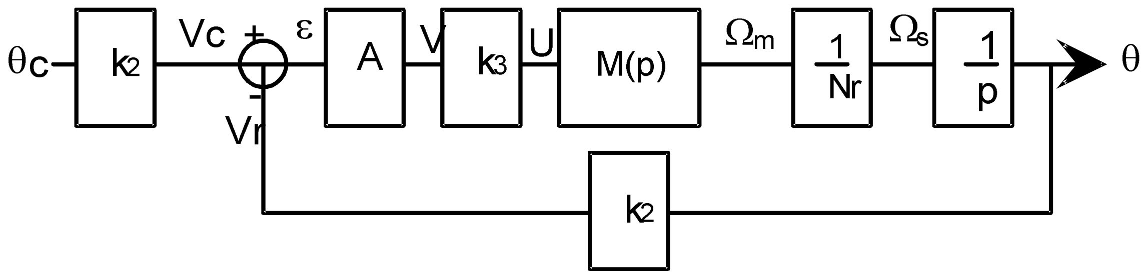


- On donne les équations de fonctionnement suivantes:
  - Organe d'affichage: $V_c = k_2\theta_c$ où k_2 est en V/rd
  - Comparateur parfait: $\varepsilon = V_c - V_r$
  - Amplificateur parfait: $V = A.\varepsilon$; $A > 0$ et réglable
  - Convertisseur c.c (hacheur) parfait et sa commande: $U = K_3.V$
  - Moteur + charge précédent
  - Capteur de position: $V_r = k_2\theta$ où k+ est en V/°
  - Réducteur où Ω_m = vitesse arbre moteur, Ω_S vitesse du curseur du capteur de position : $\Omega_m / \Omega_S = Nr$.

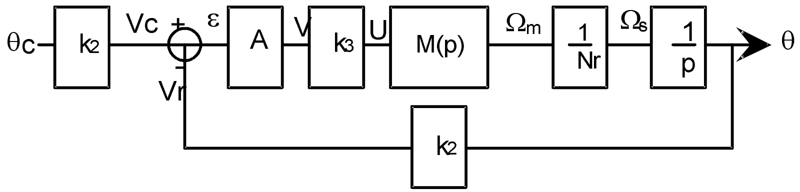
Exemple 3 : Asservissement de position d'une antenne (2)

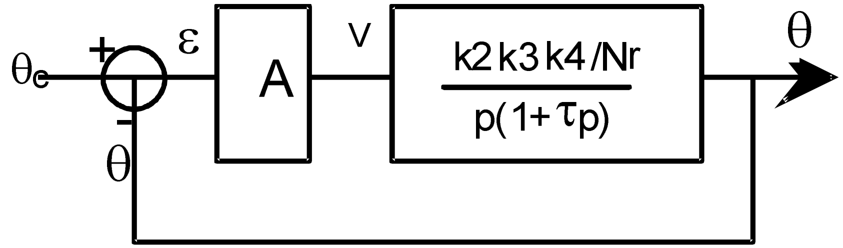
- On donne les équations de fonctionnement suivantes:
  - Organe d'affichage: $V_c = k_2\theta_c$ où k_2 est en V/rd
  - Comparateur parfait: $\varepsilon = V_c - V_r$
  - Amplificateur parfait: $V = A.\varepsilon$; $A > 0$ et réglable
  - Convertisseur c.c (hacheur) parfait et sa commande: $U = K_3.V$
  - Moteur + charge précédent
  - Capteur de position: $V_r = k_2\theta$ où k+ est en V/°
  - Réducteur où Ω_m = vitesse arbre moteur
  - Ω_S vitesse du curseur du capteur de position.



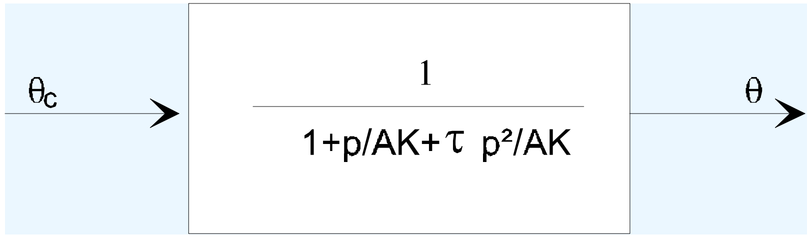


Exemple 3 : Asservissement de position d'une antenne (3)





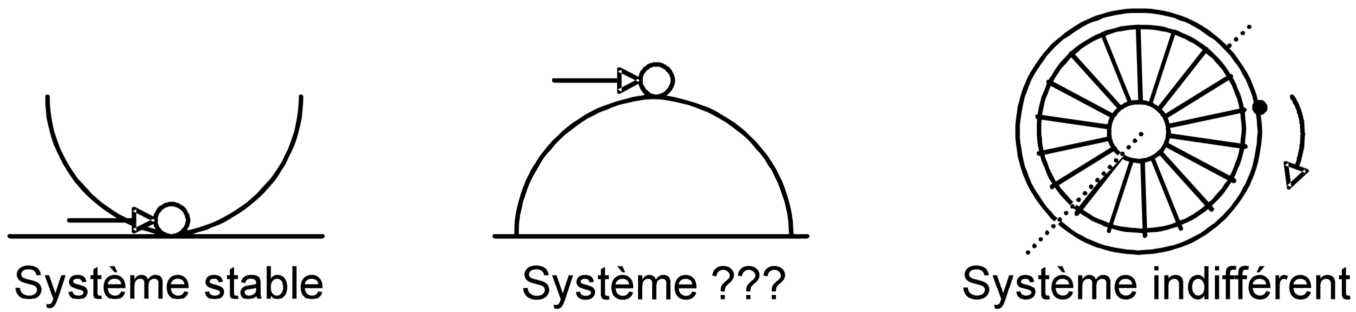
$$FTBO : T(p) = \frac{A.K}{p(1+\tau.p)}; \quad FTBF : H(p) = \frac{AK}{AK + p + \tau.p^2} = \frac{1}{1 + \frac{p}{AK} + \frac{\tau.p^2}{AK}}$$



$$t \to \infty \qquad FTBF \to 1 \Rightarrow \text{erreur statique nulle}$$

Stabilité des Systèmes Asservis Linéaires

- Exemples de stabilité



- **Énoncé**
  - Un système physique est en équilibre stable s'il retourne spontanément vers cet équilibre lorsqu'il en est momentanément écarté.
  - Remarque: un système instable finit toujours par quitter son domaine linéaire. Il peut alors se produire:
    - une stabilisation sur un état d'équilibre stable indépendant de l'entrée du système mais dépendant des saturations du système.
    - un phénomène de pompage : oscillations (sinusoïdales ou non) permanentes.

Critère simplifié de stabilité des systèmes asservis

- Soit un système à retour unitaire (x,y) de FTBF où T(p) est la FTBO du système $H(p) = \dfrac{K}{1+T(p)}$

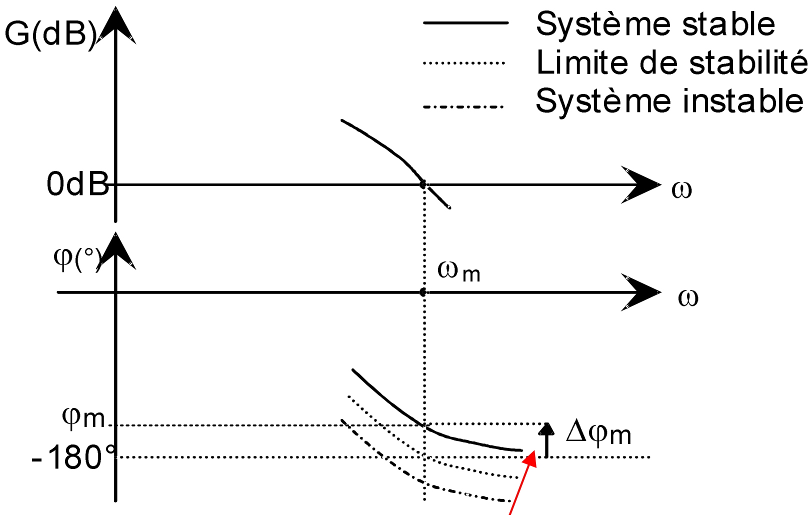
- Les pôles de $H(p)$ sont les racines de $1+T(p)=0$ c'est-à-dire les solutions p_i telles que : $T(p_i)=-1$.
  La limite de stabilité correspond aux pôles à partie réelle nulle soit $p_i=j\omega_i$.
  Sur le diagramme de Bode de $\underline{T}(j\omega)$ cela revient à chercher le point $\omega=\omega_i$ tels que $\underline{T}(j\omega_i)=-1$, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle le lieu de $|\underline{T}(j\omega_i)| = 1$ et $\arg(\underline{T}(j\omega_i)) = -180°$.
- Lorsque l'amplification A système augmente, le degrè de stabilité diminue
  $\Rightarrow$ un système à la limite de stabilité devient instable lorsque A augmente.

Énoncé du critère dans le plan de Bode

Le critère simplifié s'applique aux systèmes dits réguliers tels que :

- ✓ ordre ≥ 2,
- ✓ la FTBO $\underline{T}(j\omega)$ est stable,
- ✓ boucle de retour non inversée

Soit $\Delta\varphi_m = \varphi(\omega_m) - (-180)$: marge de phase du système.



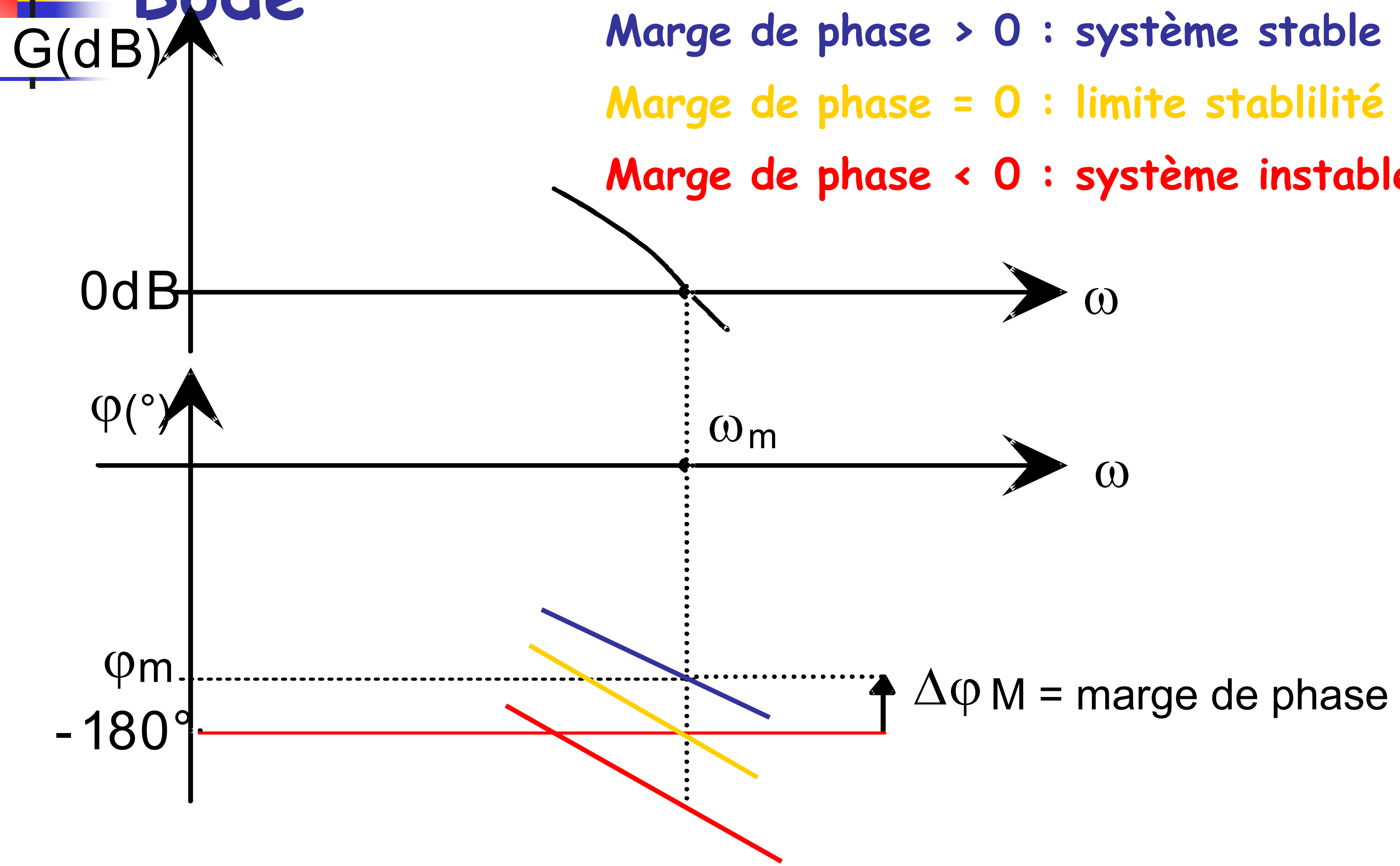
Un système est stable en boucle fermée si la *marge de phase $\Delta\varphi_m$* est positive.

Énoncé du critère dans le plan de Bode

Marge de phase > 0 : système stable

Marge de phase = 0 : limite stablilité

Marge de phase < 0 : système instable

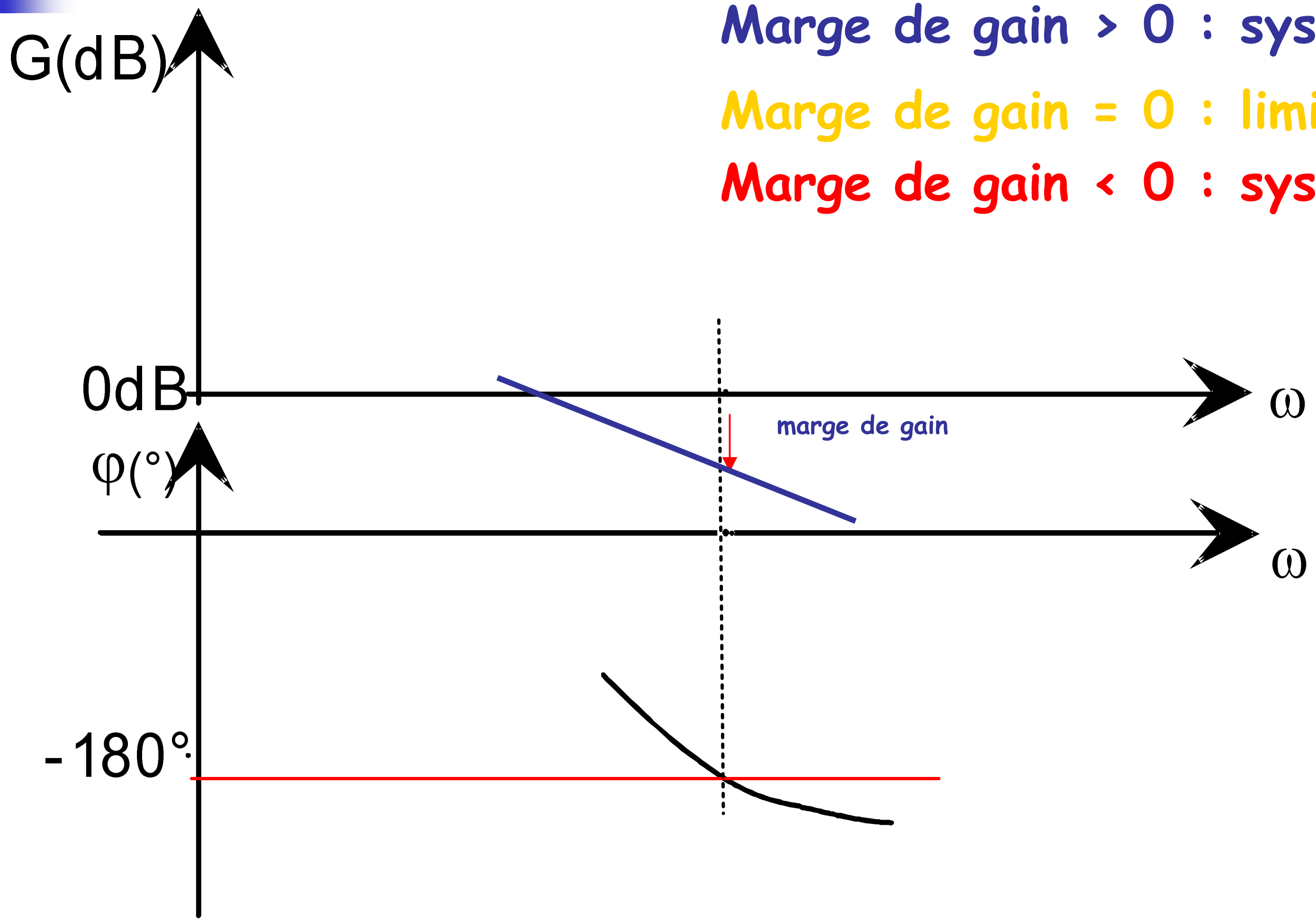


Marge de gain

Marge de gain > 0 : système stable

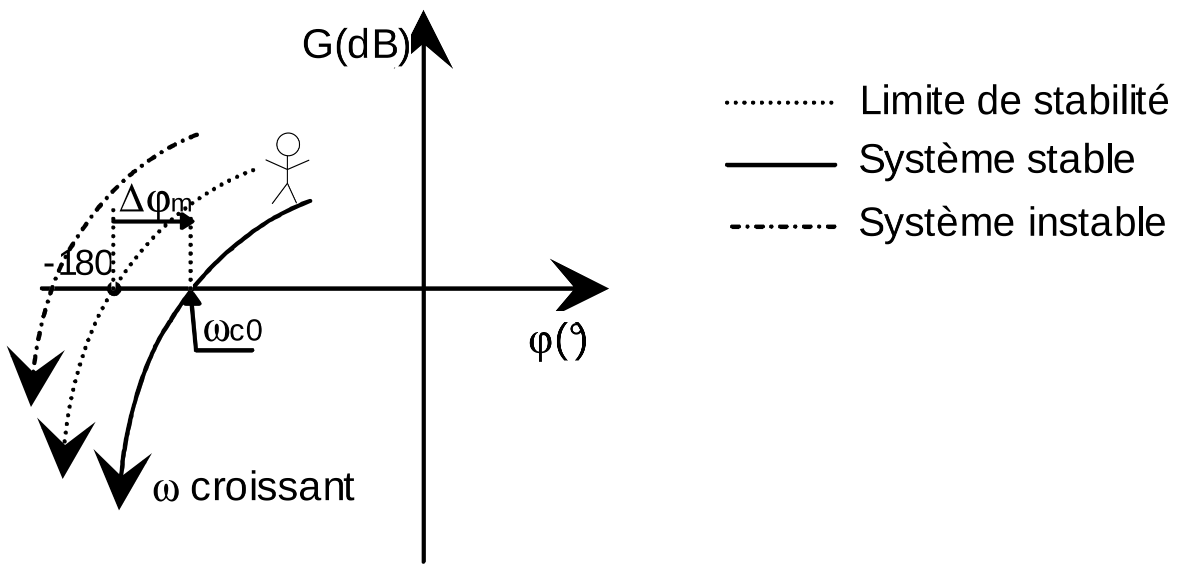
Marge de gain = 0 : limite stabilité

Marge de gain < 0 : système instable



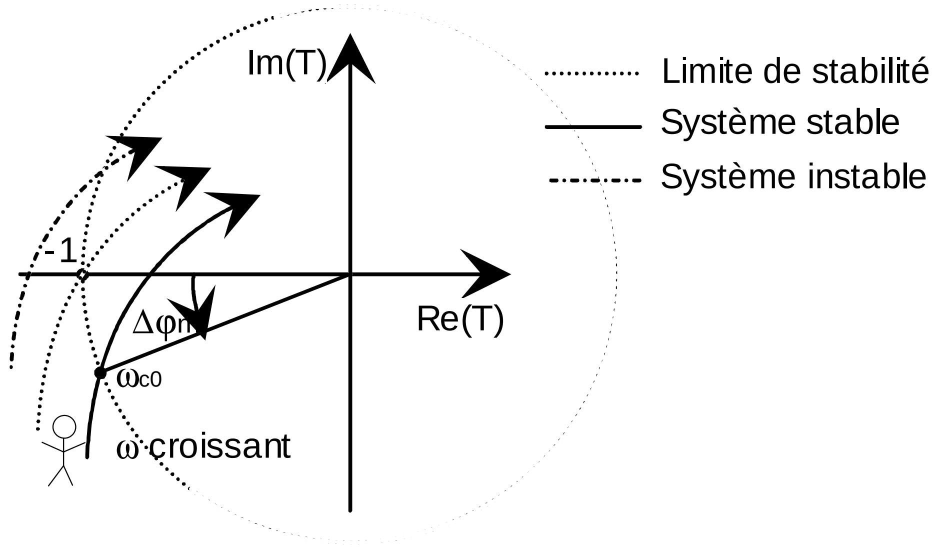
Énoncé du critère dans le plan de Black

Le système est stable en boucle fermée si en parcourant le diagramme de Black de la FTBO dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique à droite,



Énoncé du critère dans le plan de Nyquist

Si en parcourant le diagramme de Nyquist de la FTBO dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique à gauche, le système est stable en boucle fermée.

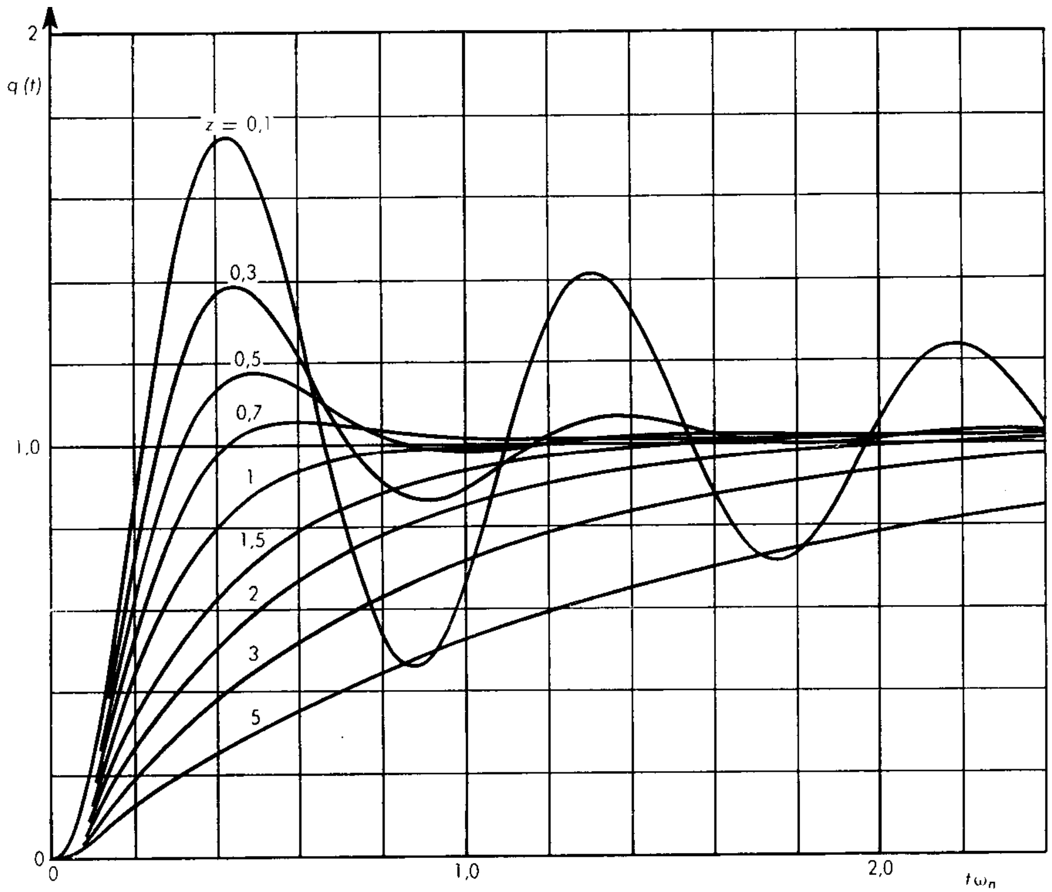


Stabilité, marge de phase et rapidité

- **Degré de stabilité et marge de phase**
  - Choix de la marge de phase

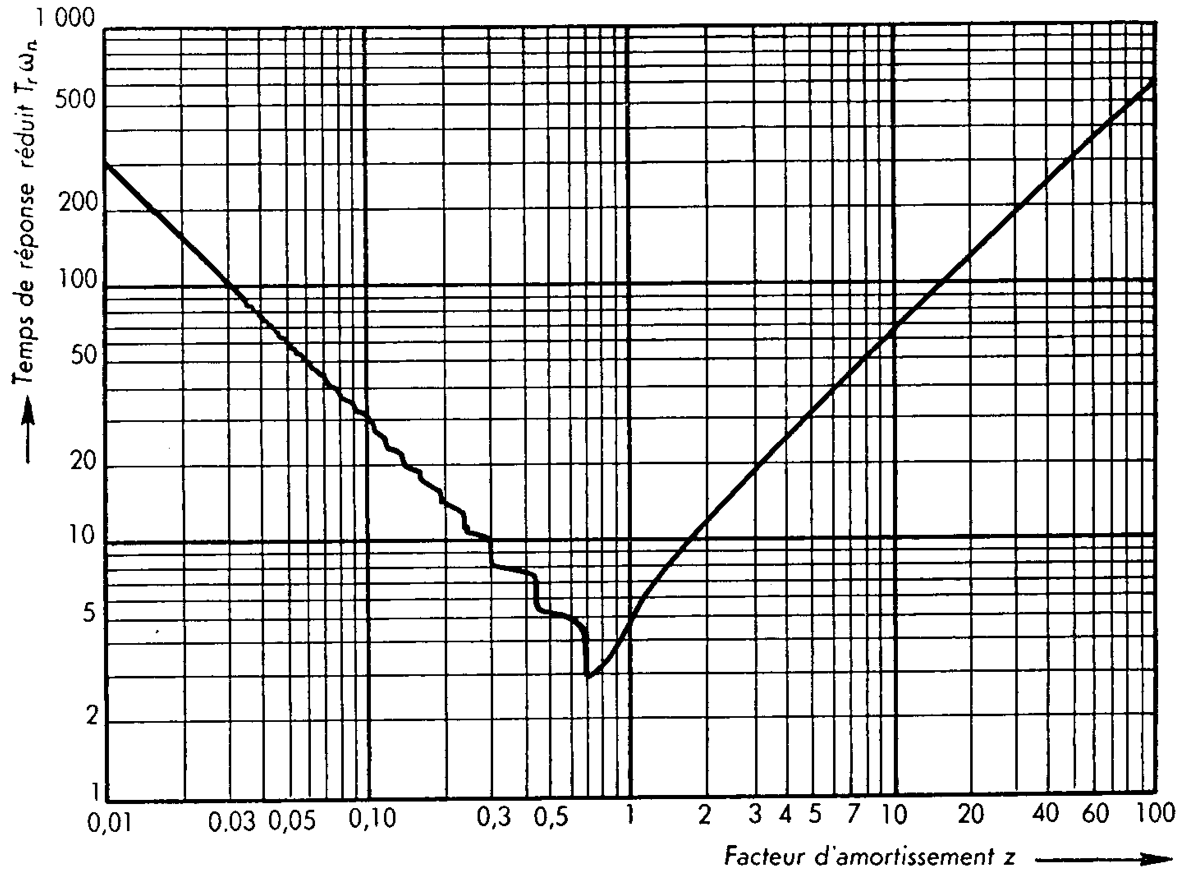
    Il ne suffit pas qu'un système asservi soit stable. Il doit également présenter un régime transitoire satisfaisant.
    Fixer une marge de phase $\Delta\varphi_m$ revient à assurer un degré de stabilité donné.
- **Rapidité du système**
  - Exemple: un système de FTBO dont la marge de phase est réglée à $\Delta\varphi_m \approx 45°$ donne une FTBF du second ordre avec $m \cong 0.43$,
    - un dépassement D=20%
    - Un temps de réponse à 5%=$0.85.T_0$ où T_0 est la période naturelle et $\omega_r=1/T_0$, la pulsation de résonance.
  - Comme tout système d'ordre supérieur à 2 présente un mode dominant du second ordre, ce résultat peut être généralisé.

Détermination de la réponse indicielle à l'aide d'abaques



Réponse indicielle d'un système $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2m\delta j\omega + \delta^2 (j\omega)^2}$ pour différentes valeurs de m en fonction du temps de réponse réduit

Détermination du temps de réponse à l'aide d'abaques



Temps de réponse réduit en fonction de m pour un système $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2m\delta j\omega + \delta^2 (j\omega)^2}$

Critère général de stabilité

- Soit la FT en boucle fermée d'un système (x, y) du 2ième ordre dont l'équation différentielle de fonctionnement est:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy(t)=kx(t) \qquad c>0 \quad \text{et} \quad b>0 \quad \text{ou} \quad b<0$$

En posant $\omega_0=\sqrt{c}$ et $m=\dfrac{b}{\omega_0}$

L'équation caractéristique devient :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2m\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^{\,2}y(t)=kx(t)$$

La fonction de transfert opérationnelle est :

$$\mathrm{H(p)}=\frac{\mathrm{Y(p)}}{\mathrm{X(p)}}=\frac{k}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^{\,2}} \quad \text{avec} \quad \text{k : gain statique}$$

Critère général de stabilité (2)

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}$$

- Il s'agit d'étudier le régime libre du système c'est-à-dire de résoudre l'équation différentielle associée avec $x(t)\equiv 0$ et $y(0+)=y0$.
  - La forme du régime transitoire dépend des racines du polynôme caractéristique de l'ED.
  - Comme les racines du polynôme caractéristique sont aussi les racines du dénominateur de H(p) appelées pôles de H(p), la forme du régime transitoire dépend des pôles de la FT H(p).

$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2-1) \Rightarrow p1, p2 = \omega_0\left[-m \pm \sqrt{m^2-1}\right]$$

La stabilité ne fait intervenir que les pôles du dénominateur

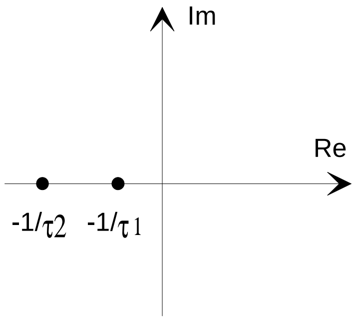
Critère général de stabilité (3)

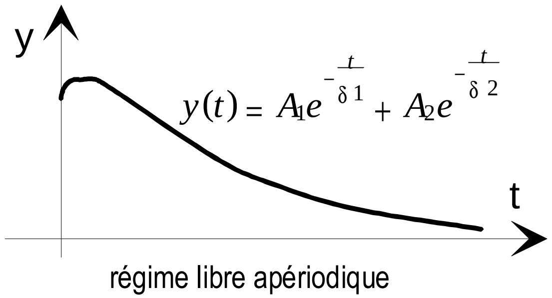
$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

- **En fonction de *m* 5 cas sont possibles :**
  1. m > 1 $\Rightarrow$ Δ>0
     2 racines réelles distinctes négatives : D=(*p-p1*)(*p-p2*) avec p1, p2 < 0

$$p1, p2 = \omega_0\left[-m \pm \sqrt{m^2 - 1}\right]$$

$$y(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\delta 1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\delta 2}}$$





Le système est stable

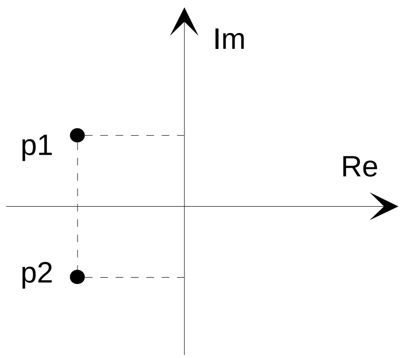
Critère général de stabilité (4)

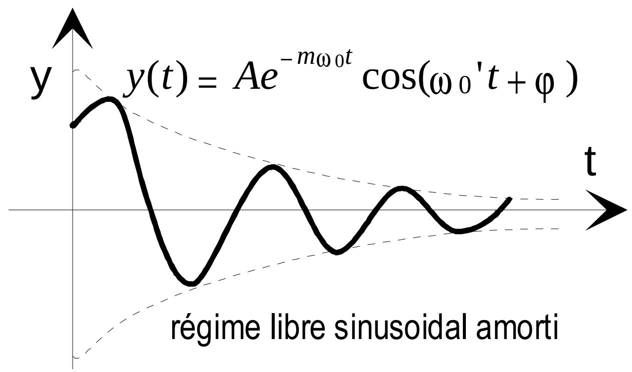
$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

2. $0 < m < 1 \Rightarrow \Delta < 0$
   2 racines complexes conjuguées à partie réelle négatives

$$p1 = p2 = -m\omega_0 \pm j\omega_0' \qquad \text{avec} \quad \omega_0' = \sqrt{m^2 - 1}$$

$$y(t) = Ae^{-m\omega_0 t}\cos(\omega_0' t + \varphi)$$





Le système est stable

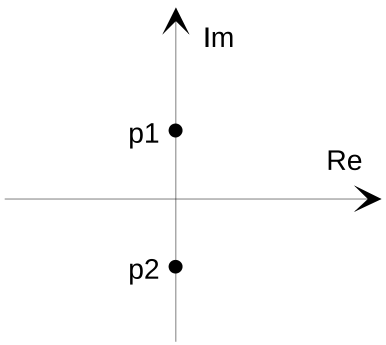
Critère général de stabilité (5)

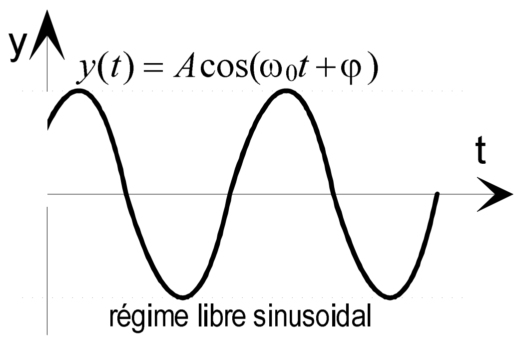
$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

3. m = 0 $\Rightarrow \Delta < 0$
   2 racines complexes conjuguées à partie réelle nulle

$$p1 = p2 = \pm j\omega_0'$$

$$y(t) = A.\cos(\omega_0' t + \varphi)$$





Le système est à la limite de la stabilité

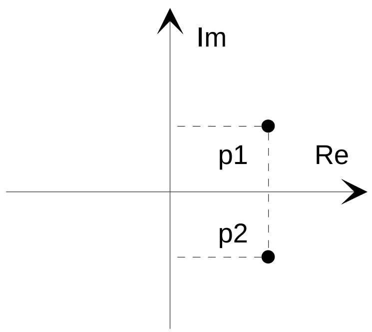
Critère général de stabilité (6)

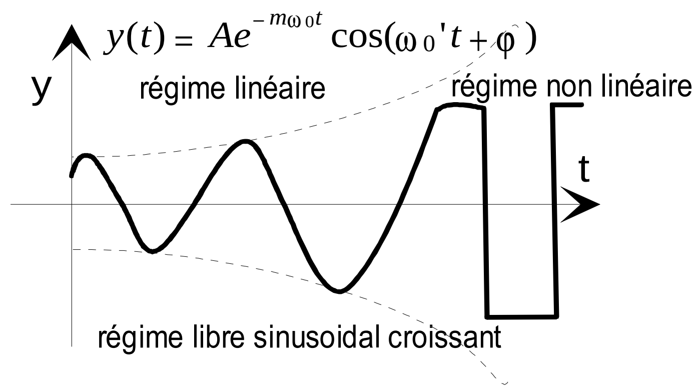
$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

4. -1 < m < 0 $\Rightarrow \Delta < 0$
   2 racines complexes conjuguées à partie réelle positive

$$p1, p2 = -m\omega_0 \pm j\omega_0' \qquad \text{avec} \quad \omega_0' = \sqrt{m^2 - 1}$$

$$y(t) = Ae^{-m\omega_0 t}\cos(\omega_0' t + \varphi) \qquad (m < 0)$$





Le système est instable

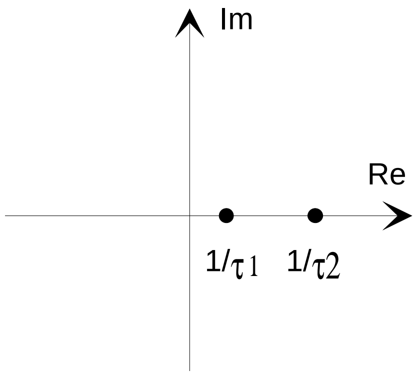
Critère général de stabilité (7)

$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2-1)$$

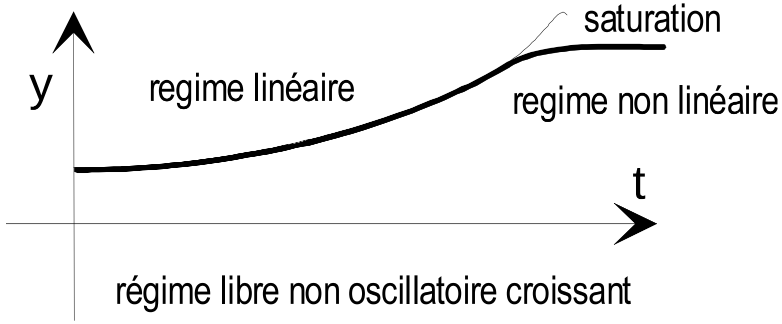
5. $m < -1 \Rightarrow \Delta > 0$
   2 pôles réels distincts positifs

$$p1 = \frac{1}{\delta 1}; \quad p2 = \frac{1}{\delta 2}$$

$$y(t) = A_1 e^{\frac{t}{\delta 1}} + A_2 e^{\frac{t}{\delta 2}}$$



$$y(t) = Ae^{-m\omega_0 t}\cos(\omega_0' t + \varphi)$$



Le système est instable

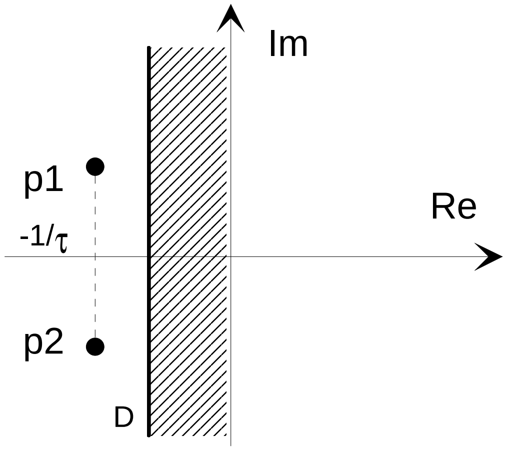
Énoncé du critère général de stabilité

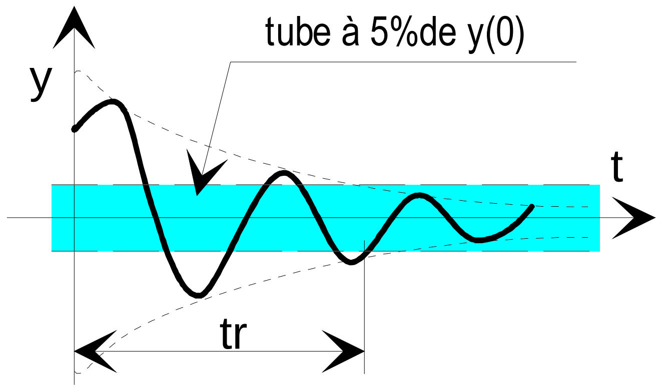
Un système de FTBO H(p) est stable si les racines de l'équation caractéristique ou pôles de H(p) sont à partie réelle négative.

Remarque: limite de stabilité Re(pi)=0

Degrés de stabilités

- **1ière marge de stabilité**
  - **Le temps de réponse est d'autan plus grand que les pôles sont proches de l'axe imaginaire.**





Degrés de stabilités

- **2ième marge de stabilité**
  - **Assurer un amortissement suffisant.**

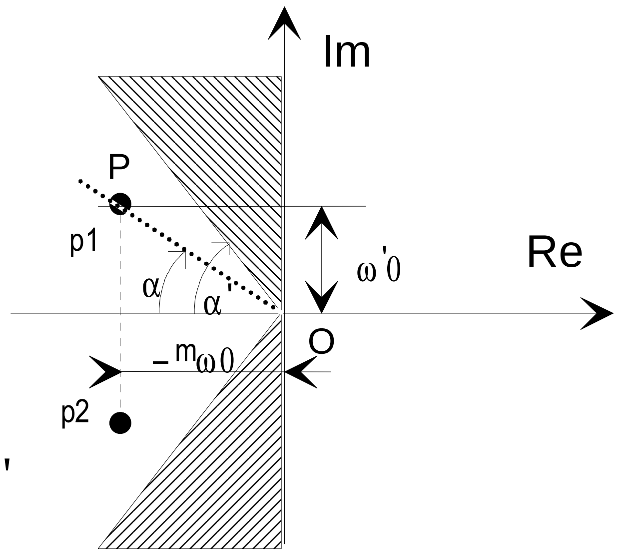
Soit $y(p) = p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0{}^2 = 0$

avec $\quad 0 < m < 1$

$p1, p2 = -m\omega_0 \pm j\sqrt{m^2 - 1}$

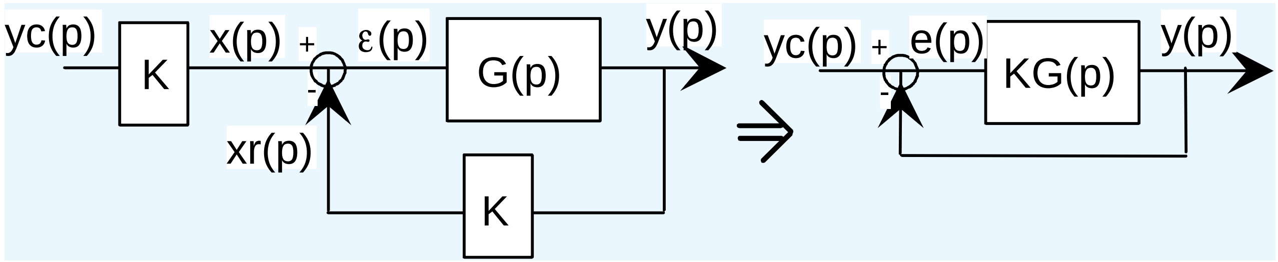
Distance OP1 $= \sqrt{(m\omega_0)^2 + \omega_0{}^2(1-m^2)} = \omega_0$

$\cos\alpha = \dfrac{m\omega_0}{\omega_0} = m \quad \alpha < \alpha' \quad \Rightarrow \cos \quad \alpha > \cos \quad \alpha'$



Précision des systèmes asservis

- **Généralités**
  - La fonction d'un système asservi est de donner une grandeur de sortie y aussi voisine que possible de la grandeur d'entrée souhaité y_c.
  - L'écart y_c-y peut être du à l'entrée principale y_c ou aux perturbations. On limite ici l'étude au calcul de l'erreur due à l'entrée principale.



Précision des systèmes asservis (2)

- **Précision en régime établi**
  - en régime transitoire on ne parle pas d'erreur : le comportement du système est caractérisée par son degrés de stabilité,
  - en régime établi l'erreur est appelée **erreur permanente**.
- **Cas où le signal d'erreur permanent est nul ou constant**
  - La forme générale de T(p) est :

$$T(p) = \frac{A}{p^{\alpha}} \frac{1 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \ldots + a_l p^l} \approx \frac{A}{p^{\alpha}}$$

  - *A* est l'amplification du système en B.O et α la *classe* du système. L'erreur permanente dépend de α, *e(p)* ou *e(p)* dépendent de *yc(p)* ou *x(p)*.

Système de classe 0 (pas d'intégration)

$$T(p) = A\frac{1+b_1 p+...+b_m p^m}{1+a_1 p+...+a_l p^l}$$

- Quand $t \to \infty$ ($p \to 0$) $T(p) \to A$.

  Si en régime établi $e(p)$ = constante = e_0 ,

  $Xr = A.e_0$ et $X = (1+A).e_0$

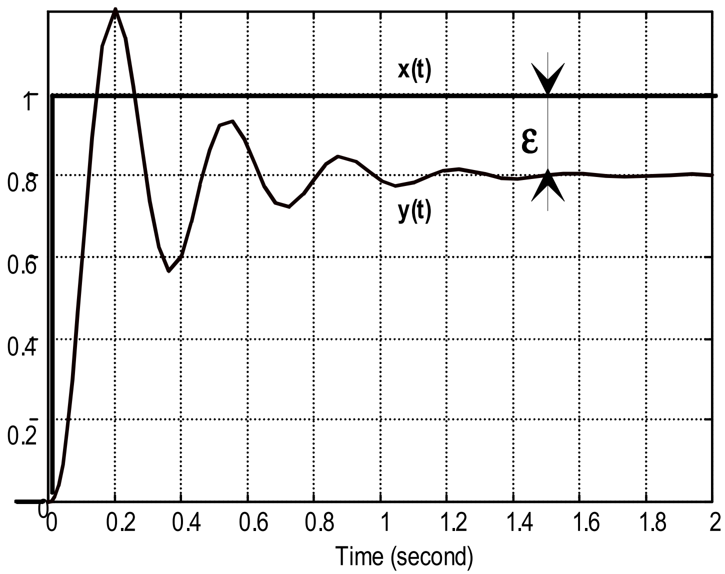
- $e = 0 \Rightarrow X = 0$, e = constante $\Rightarrow X$ = constante.

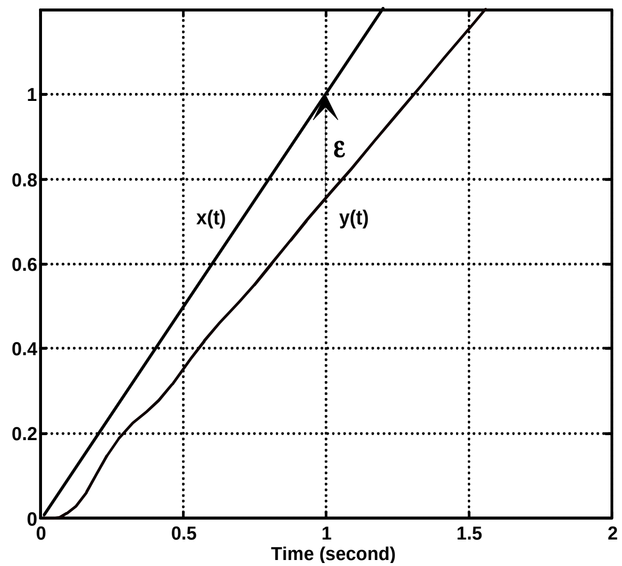
  $$X \text{ devient } X_0 \quad et\ \varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{X_0}{1+A}$$

Un système de classe 0 donne un signal d'erreur permanent nul si l'entrée est nulle, et un signal d'erreur permanent non nul si l'entrée est constante.

Exemple de système de classe 0 : asservissement de vitesse

$$T(p) = \frac{4}{(1+0{,}1p)(1+0{,}05p)(1+0{,}08p)}$$





Erreur en sortie

- **On définit :**
  - **Erreur en sortie** : *e = yc(t) - y(t)*
  - **Signal d'erreur en sortie** : *ε = x(t) - xr(t)*
  - **Posons** *T(p) = K.G(p)*

$$e(p) = E; \quad yc(p) = Y$$

$$E = Yc - Y = Yc - E.T(p) \Rightarrow E\big(1 + T(p)\big) = Yc$$

$$\frac{E}{Yc} = \frac{1}{1 + T(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \mathrm{E}; \quad x(p) = X$$

$$\mathrm{E} = X - Xr = X - \mathrm{E}.T(p) \Rightarrow \mathrm{E}\big(1 + T(p)\big) = X$$

$$\frac{\mathrm{E}}{X} = \frac{1}{1 + T(p)}$$

Ces relations montrent :
• qu'au lieu de calculer *e(p)* à partir de *yc(p)*, il revient au même de calculer *ε(p)* à partir de *x(p)*,
• que le système n'intervient que par sa transmittance *T(p)*,
• que l'erreur dépend de *x(p)*. Pour juger de la précision il faut connaître *x(t)*.

Système de classe 1 (une d'intégration)

$$T(p) = \frac{A}{p} * \frac{1 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \ldots + a_l p^l}$$

- Quand $t \to \infty$ ($p \to 0$) $T(p) \to A/p$.

  En régime permanent $T(p)$ se comporte comme un intégrateur,

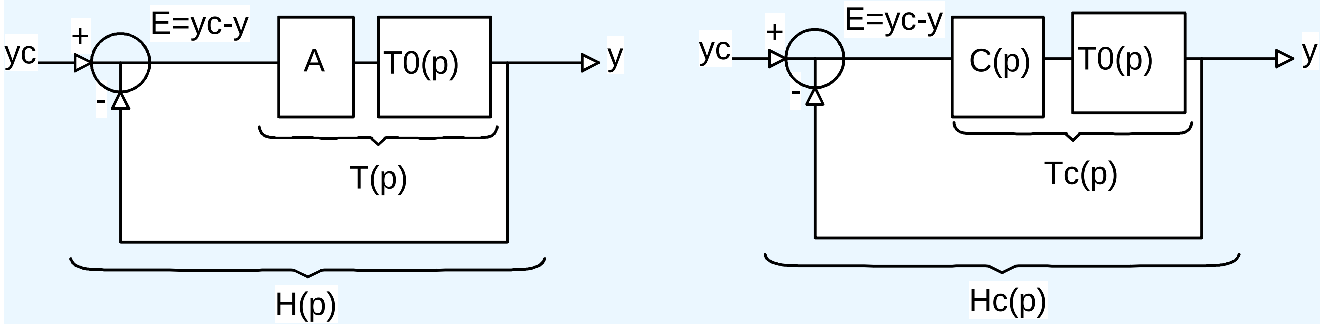
- e = 0 : x(t) = xr(t) + ε = constante

- ε = constante = ε_0 $\Rightarrow$ $xr(t) = \varepsilon_0.A.\ t +$ const, $\Rightarrow \varepsilon \searrow$ $\varepsilon \neq$ constante : $\varepsilon = 0$
  $dxr/dt = \varepsilon_0.A.$ $\Rightarrow dx/dt = \varepsilon_0.A$ = constante

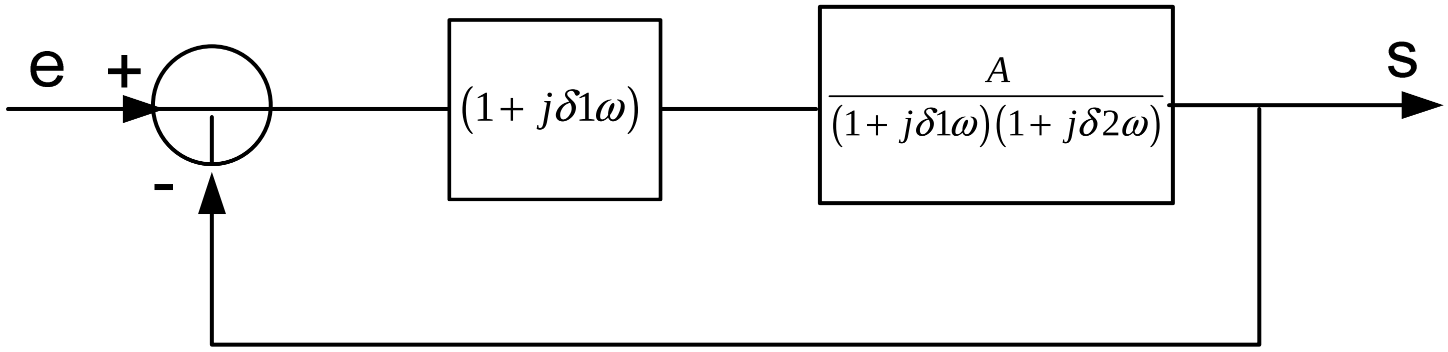
Un système de classe 1 donne un signal d'erreur permanent nul si l'entrée est constante,
et un signal d'erreur permanent constant si la dérivée première de l'entrée en constante.

Correction des Systèmes Asservis

- **Nécessité de la correction**
  - Pour augmenter le précision d'un système asservi, on ne peut qu'augmenter l'amplification A ce qui conduit très rapidement à une instabilité. **Précision et stabilité sont incompatibles.**
  - En remarquant que la précision ne concerne le régime permanent, la stabilité concerne la position de la FTBO par rapport au point critique (0dB,-180°). Il est donc possible d'améliorer la précision sans nuire à la stabilité et inversement.
- **La correction des SAL consiste alors à introduire dans la chaîne directe des circuits appelés correcteurs dont la fonction est:**
  - d'améliorer la précision sans nuire à la stabilité,
  - d'améliorer la stabilité sans nuire à la précision,
  - d'améliorer à la fois la précision et la stabilité.



Remarques



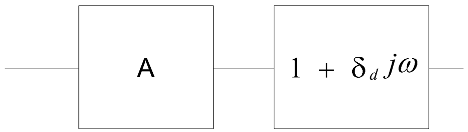
Types de correcteurs

- Pour corriger un système, on commande la chaîne directe par un signal fonction du signal d'erreur. Les lois de commande utilisées sont :
  - **La commande proportionnelle et dérivée (PD),**
  - **la commande proportionnelle et intégrale (PI),**
  - **la commande proportionnelle intégrale et dérivée (PID).**

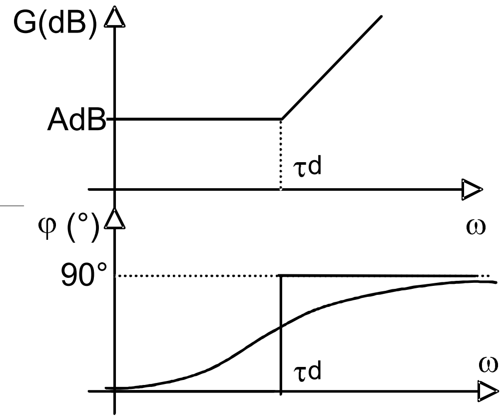
Correction proportionnelle et dérivée (PD)

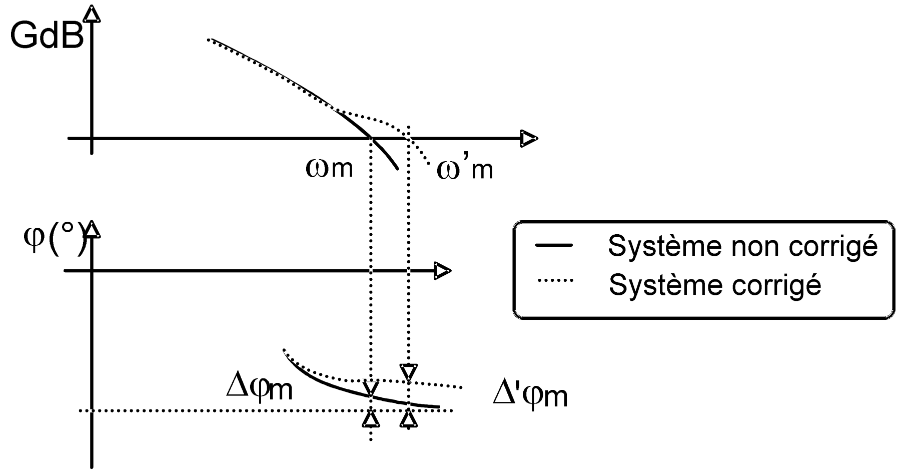
- Le correcteur PD doit ajouter de la phase au voisinage du point critique.
- Effet fréquentiel
  Si on choisit ω_1 proche de ω_m ce correcteur a pour caractéristique d'ajouter de la phase donc d'augmenter la marge de phase c'est-à-dire d'améliorer la stabilité.

Correcteur PD



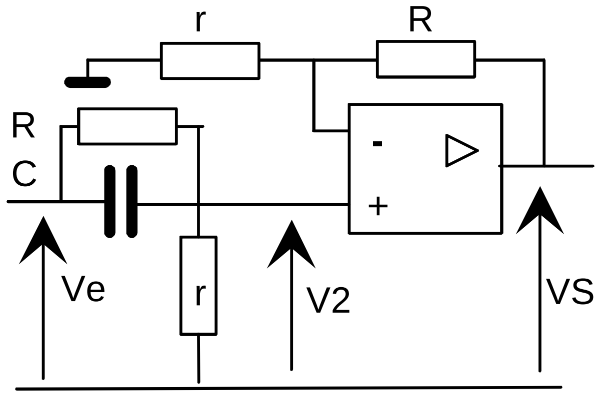
$$C(p) = A\left(1 + \delta_d j\omega\right)$$



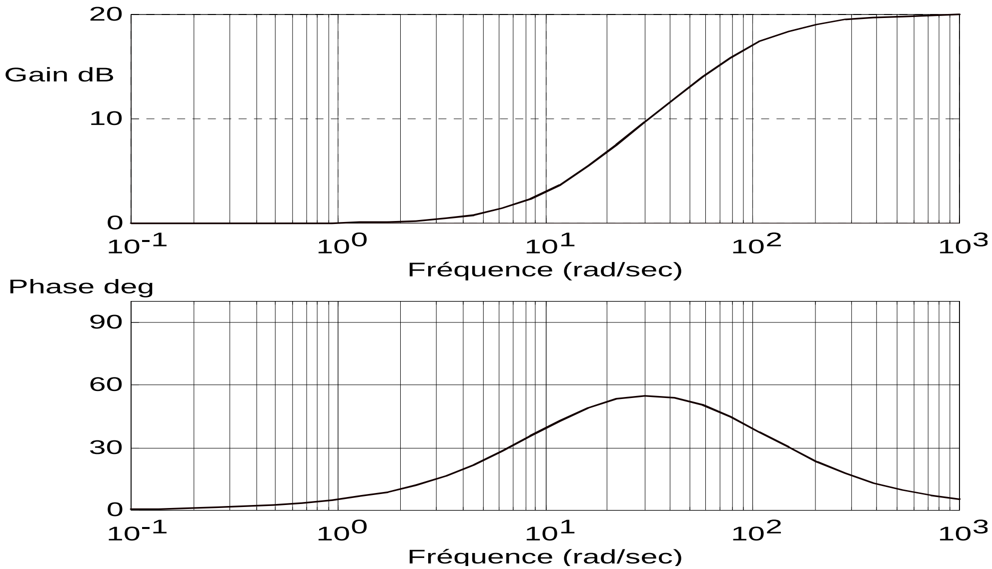


- Ce correcteur présente les inconvénients suivants :
  - Il n'est pas réalisable car le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur.
  - Il amplifie fortement les hautes fréquences augmentant la sensibilité du système aux bruits de toutes origines.

Correcteur à avance de phase



$$\frac{Vs}{Ve} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{k.\omega_0}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}; \quad k = 1 + \frac{R}{r} > 1$$



La correction proportionnelle et intégrale (PI)

- Dans un asservissement de position, le moteur ne démarre que si la tension à ses bornes dépasse un certain seuil Us.

  Dans la commande proportionnelle u = A.ε.

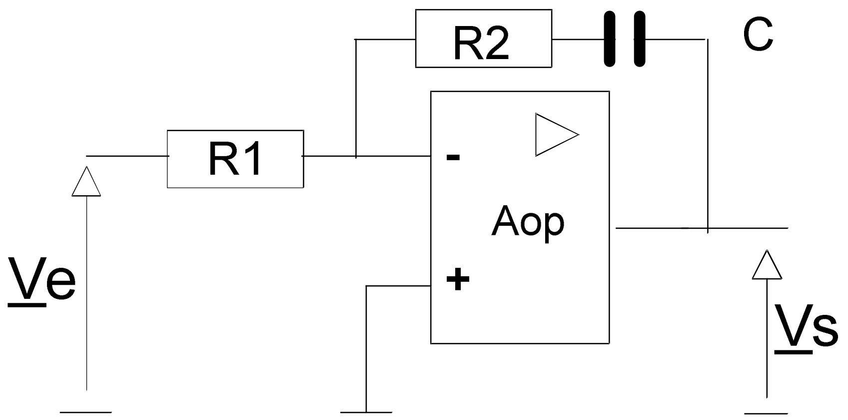
  Un écart ε constant produit une commande u constante. Compte - tenu de la valeur de A, cette commande peut être insuffisante pour produire une rotation du moteur interdisant l'annulation de ε. (Ceci est toujours le cas lorsque l'écart e est faible, donc près de la position souhaitée, et ne permet pas d'annuler l'erreur de position yc – y).

- Pour obtenir l'annulation de ε, on se propose de faire croître le module de la commande u en fonction du temps :

$$u(t) = A\left(\varepsilon_c + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon_c(t')dt' \right)$$

- La commande finit toujours par être suffisante pour actionner le moteur. Cette commande ne sera nulle que si ε = 0 et y = yc.

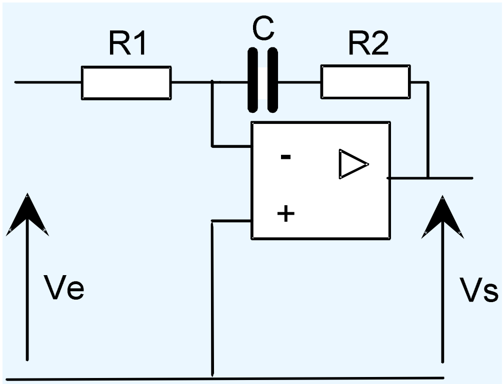
Correcteur proportionel intégral

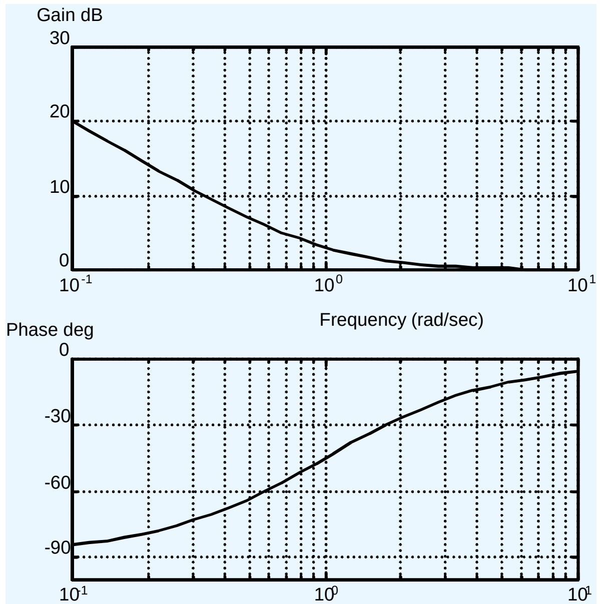


- Calculer la FT Vs/Ve
- Tracer la réponse de Bode

Effet fréquentiel du correcteur PI

- La FT du correcteur peut être réalisé par un amplificateur intégrateur



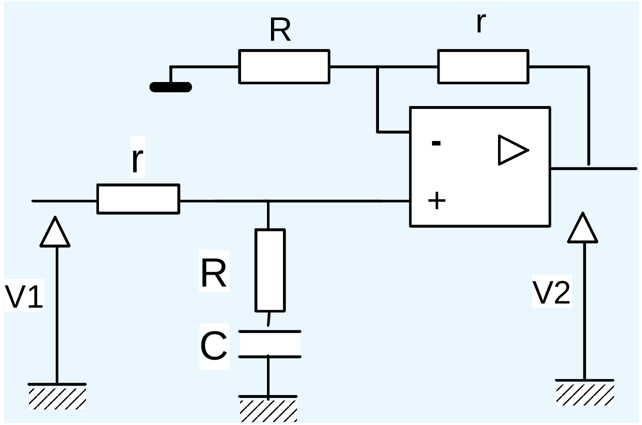


$$\underline{C} = \frac{vs}{ve} = A\frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{j\frac{\omega}{\omega_1}};\ A = \frac{R_2}{R_1};\ \omega_1 = \frac{1}{R_2 C}$$

- Il faut choisir $\omega_1 << \omega_m$ afin que le correcteur ne diminue pas la marge de phase donc la stabilité du système.
- La sortie du correcteur PI finit par se saturer. Ce correcteur n'est pas utilisable en boucle ouverte.

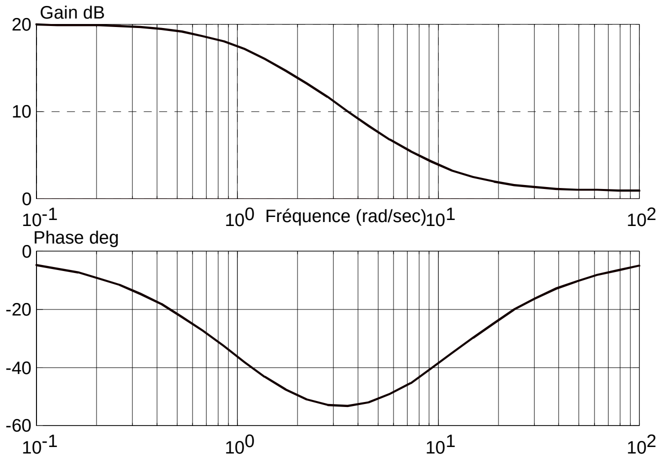
Correcteur a retard de phase

- L'action est de type intégral car il relève l'amplification en BF sans affecter les HF (stabilité).



$$\frac{V2}{V1} = C(j\omega) = k.\frac{1 + j\dfrac{\omega}{k.\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}};$$

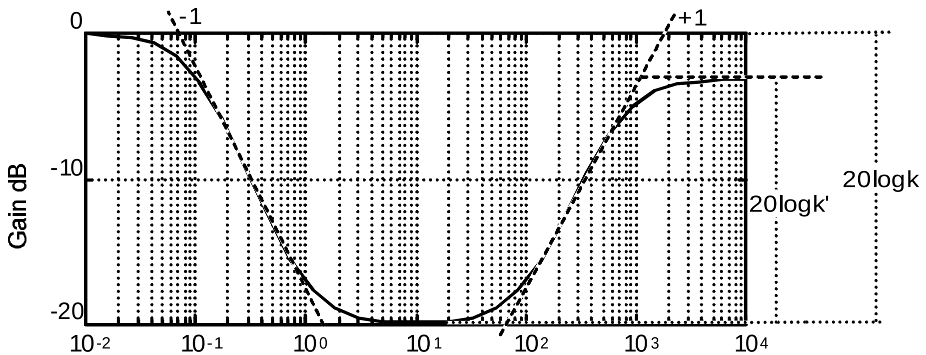
$$k = 1 + \frac{R}{r} > 1$$

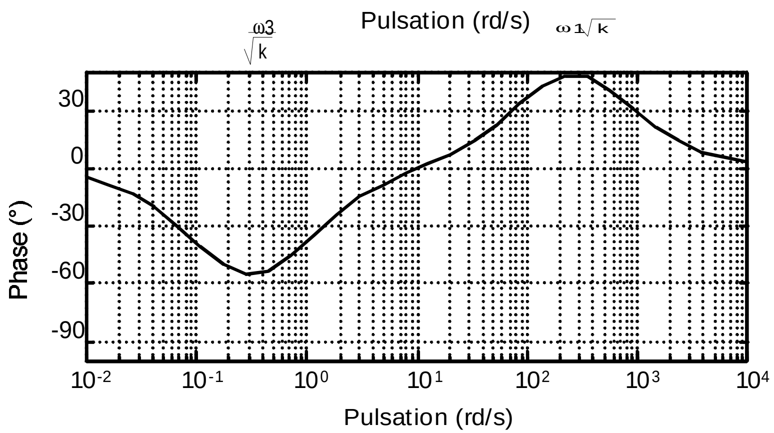


La correction proportionnelle intégrale et dérivée (PID) à correcteur avance retard de phase

- Le correcteur PID cumule les effets des deux correcteurs précédents puisque chaque correction agit dans un domaine de fréquence différent.
- Un correcteur PID peut être approché en mettant en cascade un correcteur à avance de phase et d'un correcteur à retard de phase. Le correcteur est alors appelé : correcteur par avance - retard de phase. La fonction de transfert est alors de la forme :

$$\underline{C} = \frac{1+\tau_1 j\omega}{1+\tau_2 j\omega}\frac{1+\tau_3 j\omega}{1+\tau_4 j\omega}; \text{ avec } 1/\ \tau_4 < 1/\tau_3 \ \ << \ 1/\ \tau_1 < 1/\ \tau_2$$





Introduction à MATLAB

- MATLAB est une "calculatrice" scientifique possédant comme toutes les calculatrices un mode de fonctionnement interactif et un mode programmé.
  Le mode de fonctionnement interactif est très souple et peut être utilisé pour des programmes courts : les commandes sont frappées directement dans la fenêtre de commande (*Matlab command window*). Les dernières commandes peuvent être rappelées par les touches ↑↓.
- Dans le mode programmé, les programmes sont édités (commande *File/new*) puis sauvegardés pour être exécutés par la commande *File/run M-file*. Dans la suite du texte % représente une marque de début de commentaire.
- Attention : matlab distingue les majuscules des minuscules

Variables simples

- Une variable peut être créée à tout moment : il suffit pour cela de réaliser une affectation entre un mot et une grandeur numérique. Exemple i=5; Les espaces entre les opérateurs et les opérandes sont sans importance.
- Une variable Matlab peut être un scalaire (remarquer le signe » qui est l'invite de commande)

  » a=6;

  »

  Le **;** termine la commande, s'il est omis Matlab affiche la valeur de la variable après avoir effectué l'opération désirée :

  » a=6

  a =

  6

Variables vecteurs

1. Une variable Matlab peut être un vecteur
   b= [0, 1, 2];   % ou b= [0 1 2];
2. L'opération b=b+2 donne
   » b=b+2
   b =
        2   3   4
3. L'opération b=b+[0 0 2] donne (b a la valeur de (1.)
   » b=b+[0 0 2]
   b =
        0   1   4

Variables matrices

- Une variable Matlab peut être une matrice

```
c=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
c =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
» c=c+2
c =
   3     4     5
   6     7     8
   9    10    11
```

Coefficients des polynômes

- Les coefficients d'un polynôme sont fournis sous forme de vecteur.

  Exemple $y1=3x2 +5x+8;$
  $y2=-5x2 +x+2$

  » y1=[3, 5, 8];
  » y2=[-5, 1, 2];

Calculs avec les polynômes

- Produit de deux polynômes

```
» y3=conv(y1,y2) % fournit les coefficient de y1*y2 par ordre décroissant
   y3 =
            -15   -22   -29    18    16
```

- Les racines du polynôme sont obtenues par la fonction roots

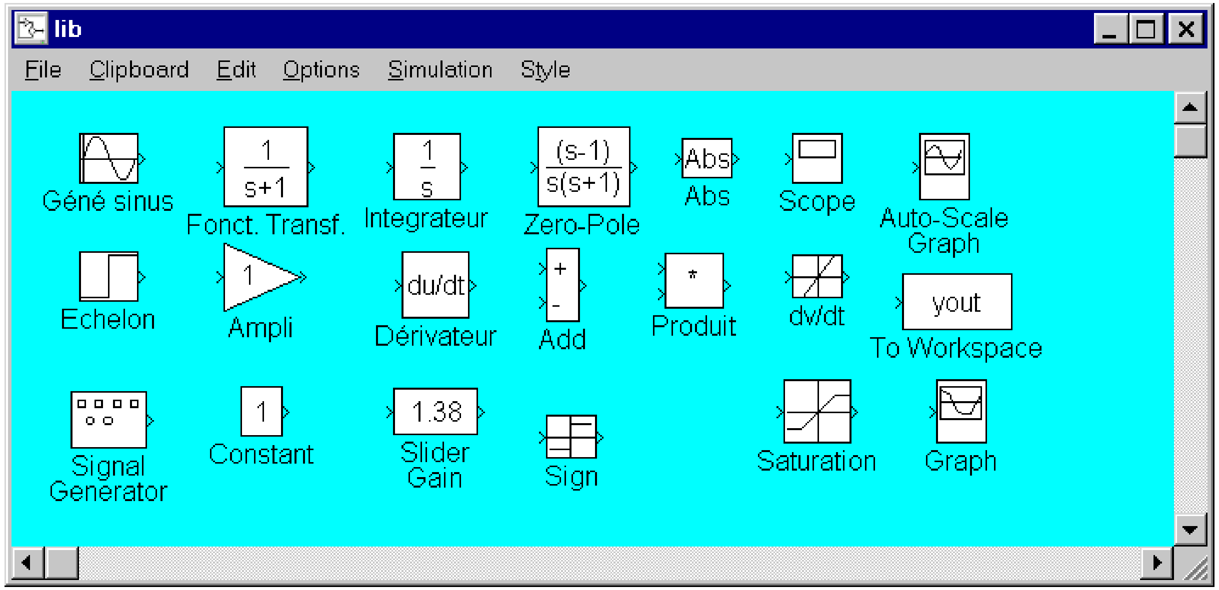
```
y1=[ 3, 5, 8 ];
 » roots(y1)
   ans =
            -0.8333 + 1.4044i
             -0.8333 - 1.4044i
```

Quelques instructions

=	% affectation
==, >, <	% comparaison
&, |, ~	% opérateurs ET, OU, PAS
IF variable,	% test
statements,	
END	
WHILE variable,	% Itération
statement, ..., statement,	
END	
clear	% annule toutes les variables et commandes précédentes
clc	% efface la fenêtre de commande
pause	% permet de mettre des points d'arrêt dans le programme (affichage de
% résultat, ...)	
plot(b)	% trace la variable b
plot(b,'*')	% trace la variable b avec des points
grid	% gradue les axes
bode(N,D)	% trace Bode de la FT dont les coefficients des polynômes en p sont placés
	% dans N et D
nyquist(N,D)	% trace nyquist de la FT dont les coefficients des polynômes en p sont
	% placés dans N et D
black(N, D);	
hold on, hold off	% commande (arrête) la superposition du prochain tracé.
printsys(N,D,'p')	% affiche la FT en utilisant p comme variable
help *commande*	% documente *commande*

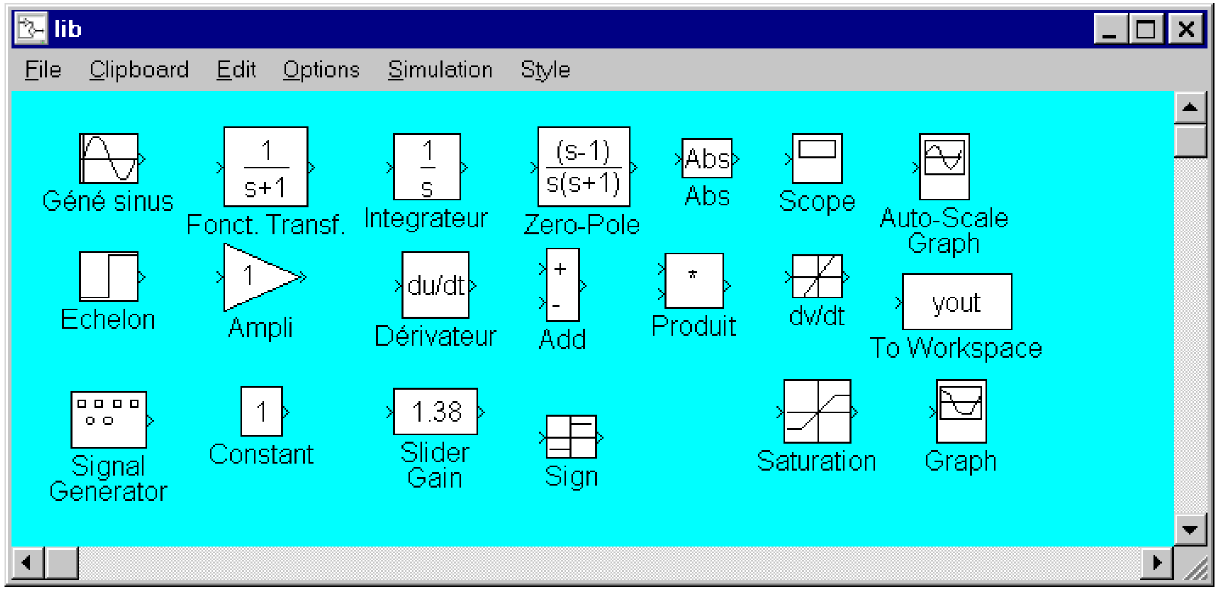
Le programme simulink

- Simulink est un ensemble de bibliothèques Matlab pour de nombreux domaines de la modélisation des systèmes, dont les asservissements. L'initialisation de cette bibliothèque se fait par la ligne de commande (sous Matlab)
- » simulink % ou par une commande personnalisée :
- » lib % cette dernière commande présente l'avantage de % limiter l'encombrement de la fenêtre



Le programme simulink

- La fenêtre présente les principaux outils permettant de créer un modèle opérationnel.
  - Le menu File permet de créer et de sauvegarder de nouveaux fichiers.
  - Simulation permet de fixer les paramètre de la simulation.
  - Toute variable définie dans Matlab est automatiquement disponible dans Simulink. Il est donc conseillé de décrire les paramètres du modèle à l'aide d'un fichier texte (.m) puis d'utiliser toutes les variables pour la construction du modèle.
  - la transformée de Laplace p se nomme ici s



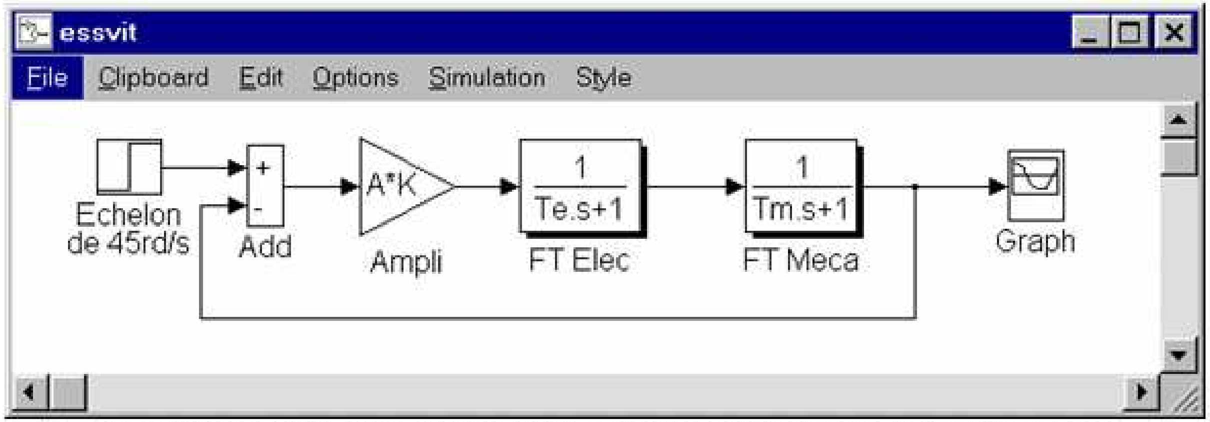
Exemple : étude de la stabilité d'un asservissement de vitesse

```
% Etude d'un asservissement de vitesse
% Fichier vitesse.m
% Lancer Matlab
% Editer le fichier File/New/M-File
%============================================
%                K.A
%  FTB0 = -------------------
%         (Te.p + 1)(Tm.p + 1)
%============================================
% Données
 Te = 0.01;  % Constante de temps électrique
 Tm = 0.1;   % Constante de temps mécanique
  K = 1;
  A = 1;
%--------------------------------------------
% Calcul de la FTBO
  N = A*K;
  D = conv([[Tm 1], [Te 1]]);
% Affichage de la FTBO pour vérification
  printsys(N, D, 'p');
% Tracé du Diagramme de Bode ou Black pour
% déterminer la marge de phase
  Bode(N,D);  % ou
  Black(N,D);
  Pause
% Sur le diagramme on relève 24,1db de marge
% de gain pour 45° de marge de phase
% => d'où A = 16
% Verification
 A= 16;
 N = K*A;
 Bode(N,D);  % ou
 Black(N,D);
 Pause
```

```
%-----------------------------------------
% Calcul de la FTBF
%-----------------------------------------
%       1                 1
%FTBF=------ = -------------------------
%     1 + 1    1 + 1/K.A.(Te.p+1)(Tm.p+1)
%        ---
%         β
%
 DFTBF = [0 0 1] + (1/(K*A))*D;
 printsys(1, DFTBF, 'p');
%             1
%   ---------------------
%   0.001 p^2 + 0.11 p + 1
% Tracé du Diagramme de Bode
  Bode(1,DFTBF);
% Détermination des pôles de la FT
  roots(DFTBF)
%  1.0e+002 *
%  -0.5500 + 1.1822i
%  -0.5500 – 1.1822i
% Lancement de simulink
  lib
% Enregistrer le fichier dans votre compte
% File/Save-as/vitesse.m
% Changer le répertoire actif de matlab :
  cd h:
% Vérifier si le fichier est vu
  dir
% Lancer le calcul par
  vitesse
% Mofifier éventuellement les paramètres
% dans le fichier vitesse.m, l'enregistrer
% et relancer le calcul.
```

Simulation : schéma

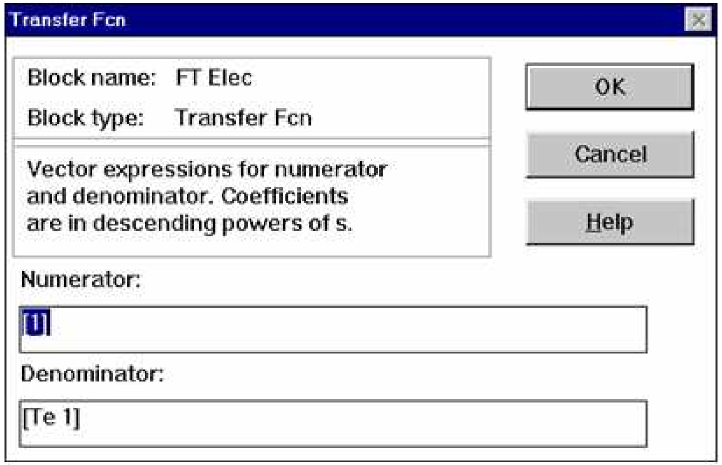
- Lancer le simulateur par *lib*
- Créer un nouveau fichier par File/New puis File/Save-As donner le nom *essvit*.
- Glisser/déposer les composants depuis la fenêtre *lib* vers le fichier *essvit* et câbler les composants (tirer le fil à la borne de sortie de chaque composant.



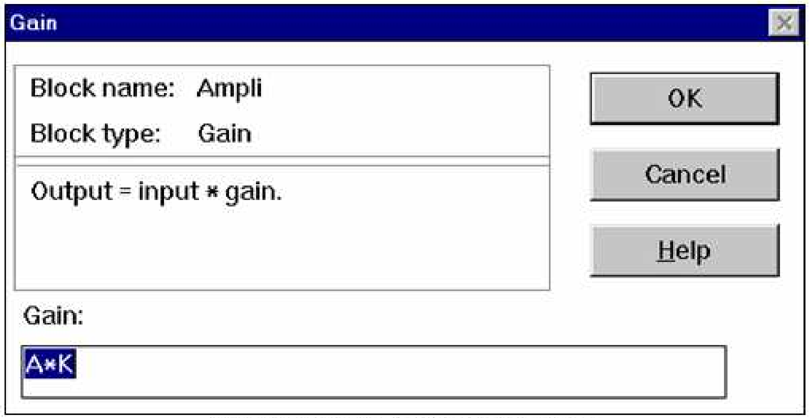
Modèle opérationnel d'un asservissement de vitesse

Renseigner les FT

- Renseigner les fonctions de transfert :

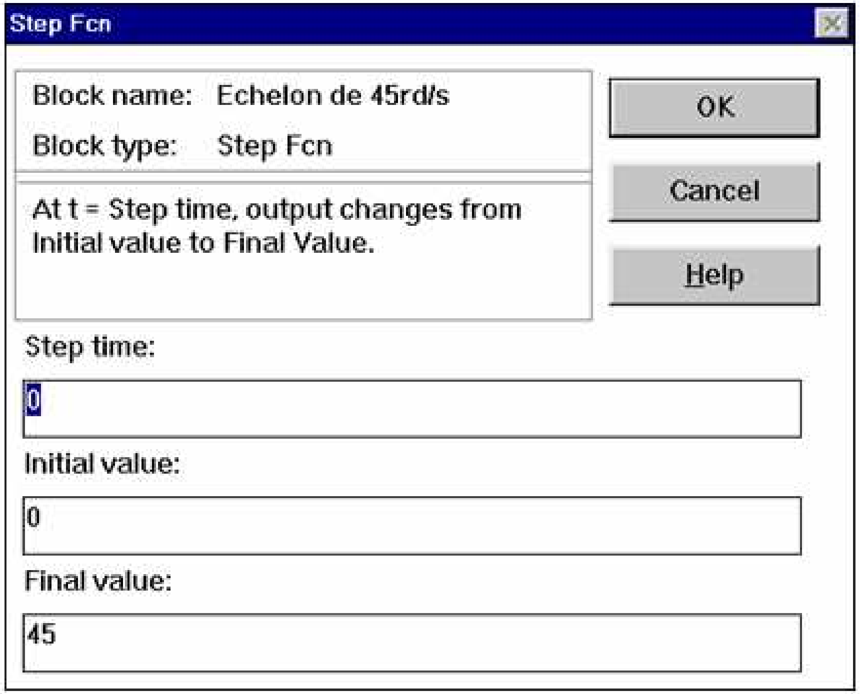


Paramétrage de la fonction de transfert électrique



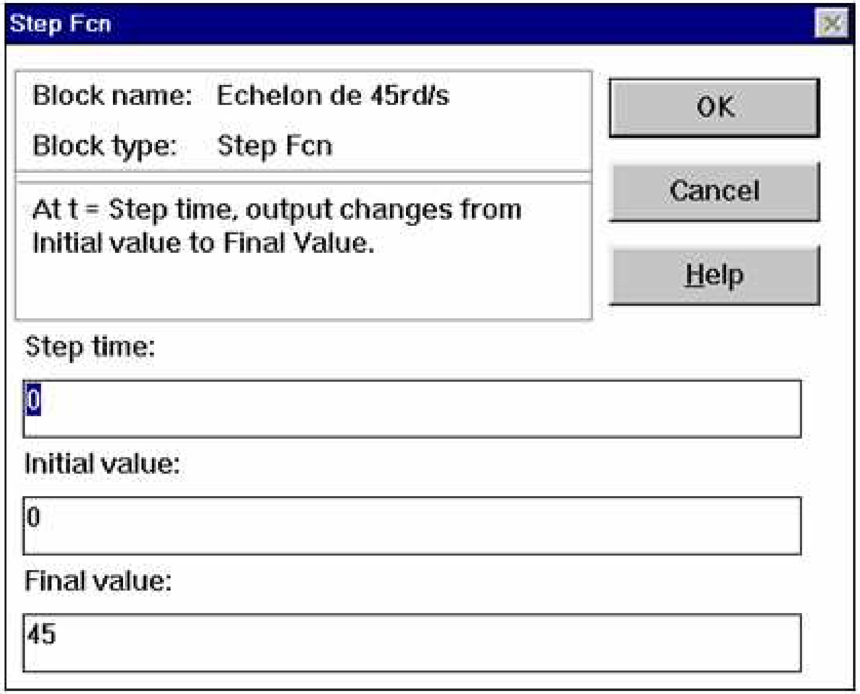
Paramétrage de l'amplificateur

Paramétrer le signal d'entrée



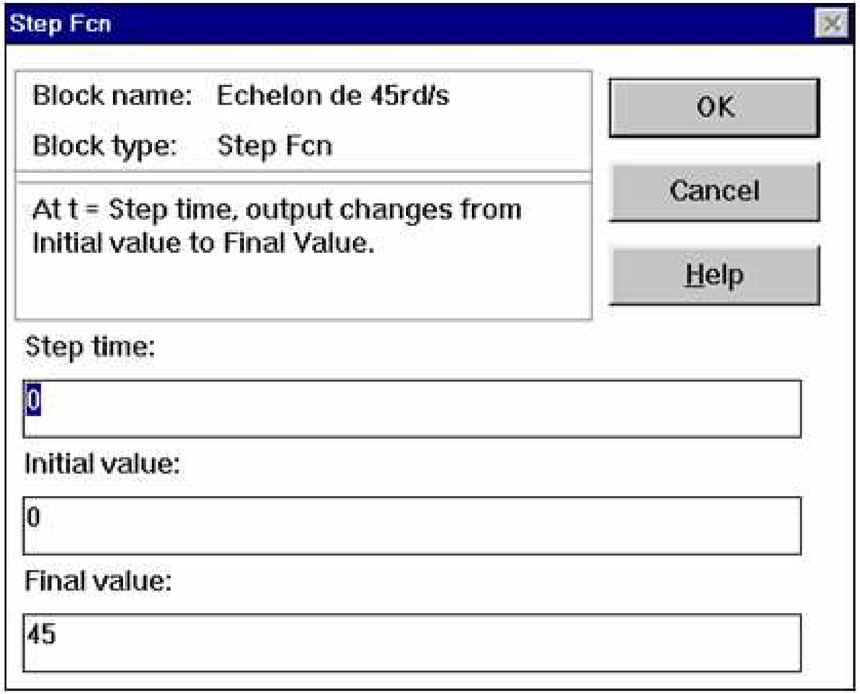
Echelon de 0..45 rd/s démarrant à l'instant t=0

Paramétrer le signal d'entrée



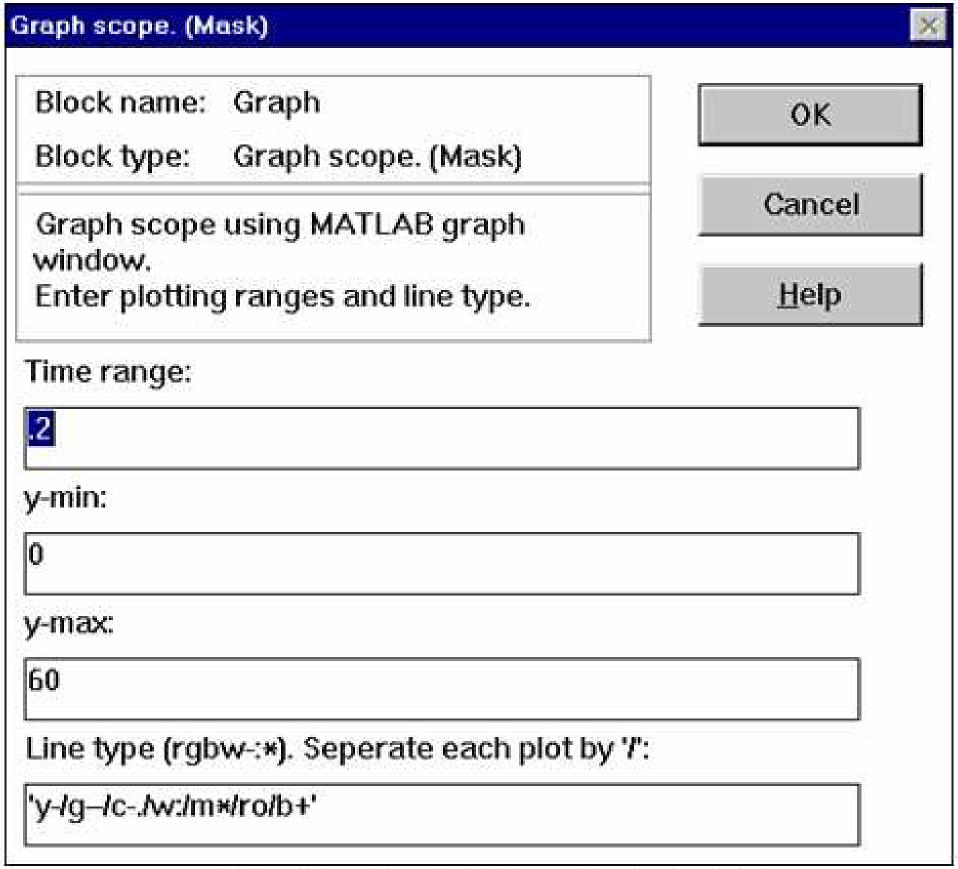
Echelon de 0..45 rd/s démarrant à l'instant t=0

Paramétrer la simulation



Echelon de 0..45 rd/s démarrant à l'instant t=0

Paramétrer l'affichage



Réglage du scope x=0,2s y=60 rd/s